74. a) Seja A um conjunto. Mostre que o par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um c.p.o. com elemento mínimo e elemento máximo.

    b) Sendo $A = \{1, 2, 3\}$, construa o diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

75. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$. Mostre que a relação $\leq_X$ definida em X por

$$x \leq_X y \Longleftrightarrow x \leq y$$

é uma ordem parcial em X. ($\leq_X$ designa-se por *ordem parcial induzida em X por* $\leq$)

76. Considere em $\mathbb{N}_0$ a relação $|$ definida por $x \mid y \Longleftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}_0} : y = xk$.

    a) Mostre que $(\mathbb{N}_0, |)$ é um c.p.o., mas não é uma cadeia.

    b) Dados $a, b \in \mathbb{N}_0$, determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de $\{a, b\}$.

    c) Diga, justificando, se $(\mathbb{N}_0, |)$ tem elemento máximo ou elemento mínimo.

    d) Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18\}$ e $Y = \{1, 2, 5, 6, 12, 20, 30, 120\}$.

       i) Construa os diagramas de Hasse de $(X, |_X)$ e de $(Y, |_Y)$.

       ii) Indique, caso existam, os elementos minimais e os elementos maximais de X.

       iii) Indique, caso existam, elementos $a, b, c, d, u, v, x, y, \in Y$ tais que

       - exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |_Y)$ e $\sup_Y \{a, b\} \neq \sup_{\mathbb{N}_0} \{a, b\}$;
       - exista ínfimo de $\{c, d\}$ em $(Y, |_Y)$ e $\text{ínf}_Y \{c, d\} \neq \text{ínf}_{\mathbb{N}_0} \{c, d\}$;
       - não exista supremo de $\{u, v\}$ em $(Y, |_Y)$;
       - não exista ínfimo de $\{x, y\}$ em $(Y, |_Y)$.

77. Prove que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, todo o conjunto de n números naturais tem máximo (para a ordem $\leq$ habitual em $\mathbb{N}$).

78. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

    a) Se X tem um elemento maximal, então X tem elemento máximo.

    b) Se X tem elemento máximo, então X tem um elemento maximal.

    c) Se existe supremo de X, então X tem um elemento maximal.

    d) Se X tem um elemento maximal, então existe supremo de X.

79. Sejam $(A, \leq)$ e $(B, \leq')$ cadeias. Considere a relação $\preceq$ definida em $A \times B$ por

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \Longleftrightarrow (a_1 \leq a_2 \wedge a_1 \neq a_2) \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \leq' b_2).$$

Mostre que $(A \times B, \preceq)$ é uma cadeia ($\preceq$ designa-se por *ordem lexicográfica* em $A \times B$).

80. Recorde que $(\mathbb{N}, \leq)$, onde $\leq$ é a ordem usual em $\mathbb{N}$, é um conjunto bem ordenado (c.b.o.). Recorde ainda que $(\mathbb{Z}, \leq)$, onde $\leq$ é a ordem usual em $\mathbb{Z}$, não é um c.b.o.

    a) Defina uma ordem parcial $\leq'$ em $\mathbb{Z}$, distinta de $\leq$, de tal forma que $(\mathbb{Z}, \leq')$ seja um c.b.o.

    b) Defina uma ordem parcial $\leq'$ em $\mathbb{N}$, distinta de $\leq$, de tal forma que $(\mathbb{N}, \leq')$ seja um c.b.o. que admita um elemento sem predecessor imediato.

81. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

    a) Indique, caso exista, uma relação binária f de A para B tal que:

        i) f não seja funcional;
        ii) $f : A \to B$ seja uma função injetiva;
        iii) $f : A \to B$ seja uma função não injetiva;
        iv) $f : A \to B$ seja uma função sobrejetiva.

    b) Indique, caso exista, uma relação binária f de B para A tal que:

        i) f não seja funcional;
        ii) $f : B \to A$ seja uma função injetiva.
        iii) $f : B \to A$ seja uma função sobrejetiva.
        iv) $f : B \to A$ seja uma função não sobrejetiva.

82. Em cada um dos seguintes casos, diga se f é funcional, em caso afirmativo se $f : A \to B$ é uma função, e ainda se é uma função injetiva ou sobrejetiva.

    a) $f = \{(1, b), (2, c), (1, c), (3, c)\}$; $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c\}$.
    b) $f = \{(1, 2), (2, 3)\}$; $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3\}$.
    c) $f = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$; $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3\}$.
    d) $f = \{(a, b), (b, c), (c, a), (d, b)\}$; $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{a, b, c\}$.
    e) $f = \{(1, 2), (2, 3)\}$; $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3\}$.

83. Para cada um dos seguintes conjuntos A diga, justificando, se a relação $f = \{(x, y) \in A \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ é funcional, e em caso afirmativo apresente uma função $f : B \to C$.

    a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
    b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
    c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
    d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

84. Recorde as definições de congruência módulo n e respetivas classes de equivalência (exercícios 67 e 68).

    a) A relação de $\mathbb{Z}_6$ em $\mathbb{Z}$ constituída pelos pares $([a]_6, 2a)$, com $a \in \mathbb{Z}$, é funcional?
    b) Existe uma função de $\mathbb{Z}_6$ em $\mathbb{N}_0$ que a cada classe $[a]_6$ associa o resto na divisão inteira de a por 6?

85. Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Seja R_f a relação binária definida em A por

$$a \, R_f \, b \iff f(a) = f(b).$$

    Mostre que R_f é uma relação de equivalência em A.