1. Escreva as seguintes frases como fórmulas proposicionais (indicando a variável proposicional correspondente a cada "afirmação atómica"):
   a) Se um número é positivo, o seu quadrado também o é.
   b) Não ganharemos o jogo se não marcarmos mais do que o adversário.
   c) Francisco vai ao cinema apenas se o filme for uma comédia.
   d) Uma condição necessária para que uma sucessão seja convergente é ela ser limitada.
   e) Uma condição suficiente para que um número seja ímpar é ele ser primo e diferente de 2.
   f) Uma condição necessária e suficiente para que a soma de dois números seja par é os dois números serem simultaneamente pares ou ímpares.

2. Encontre exemplos de "frases verdadeiras" que possam ser escritas como as seguintes fórmulas:
   a) $((p \wedge (\sim q)) \leftrightarrow r)$
   b) $((\sim p) \rightarrow (q \vee r))$
   c) $((p \wedge q) \wedge (\sim r))$

3. Diga quais das seguintes expressões são fórmulas proposicionais:
   a) $((p \wedge (\sim q)) \rightarrow r)$
   b) $(p \sim q)$
   c) $((p \rightarrow \sim) \vee q)$
   d) $((\sim (p \wedge q)) \leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$

4. Mostre que as seguintes expressões são fórmulas proposicionais:
   a) $((p \wedge (\sim q)) \leftrightarrow r)$
   b) $((p \rightarrow (\sim q)) \vee ((\sim p) \leftrightarrow r))$

5. Elimine parênteses, tanto quanto possível, das seguintes proposições:
   a) $((p_1 \leftrightarrow ((\sim p_2) \vee (p_3 \wedge p_0))) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$
   b) $(((p_0 \wedge (\sim p_1)) \wedge p_2) \vee p_3)$
   c) $((\sim (p \wedge q)) \leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q)))$
   d) $(q \rightarrow ((\sim p) \rightarrow (q \vee (\sim r))))$

6. Restaure os parênteses nas seguintes proposições:
   a) $r \rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge (p \leftrightarrow q))$
   b) $(p \rightarrow r) \rightarrow (r \leftrightarrow (\sim r \vee q))$

7. Construa tabelas de verdade das seguintes fórmulas:
   a) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
   b) $(p \rightarrow q) \vee \sim (p \leftrightarrow \sim q)$
   c) $p \leftrightarrow ((\sim q \wedge p) \rightarrow q)$
   d) $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \vee \sim p$
   e) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (q \rightarrow r)$
   f) $p \rightarrow ((q \vee r) \rightarrow (r \rightarrow \sim p))$

8. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias e quais são contradições:
   a) $\varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \varphi)$
   b) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$
   c) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \to \sim q)$
   d) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
   e) $\sim\varphi \to (\varphi \wedge \psi)$
   f) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

9. Diga quais dos seguintes pares de fórmulas são pares de fórmulas semanticamente equivalentes:
   a) $p \wedge (p \vee q)\,;\, p$
   b) $(p \wedge q) \vee \sim p; \sim p \vee q$
   c) $p \wedge (\sim p \vee q)\,;\, \sim p \wedge q$
   d) $p \wedge (q \vee r)\,;\, (p \wedge q) \vee r$

10. Mostre que:
    a) As operações lógicas de conjunção e de disjunção gozam das propriedades associativa e comutativa.
    b) São válidas as leis distributivas:
       i) $\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$.
       ii) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$.
    c) A dupla negação de uma proposição é semanticamente equivalente a essa proposição.
    d) São válidas as leis de De Morgan.

11. Mostre que a fórmula $p \to q$ é semanticamente equivalente a $\sim p \vee q$. Deduza que $p \to q$ é também semanticamente equivalente a $\sim(p \wedge \sim q)$.

12. Mostre que $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

13. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
    a) Uma condição suficiente para $p \to q$ ser verdadeira é p ser falsa.
    b) Se $p \to q$ é verdadeira, então $p \to (q \to r)$ é também verdadeira.
    c) Uma condição necessária para $p \to (q \to r)$ ser falsa é p ser verdadeira e r ser falsa.

14. Diga o que pode concluir de cada uma das seguintes hipóteses:
    a) p e $p \to q$ são ambas verdadeiras.
    b) q e $p \to q$ são ambas verdadeiras.
    c) q é falsa e $p \to q$ é verdadeira.

15. Determine proposições semanticamente equivalentes a $((p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)) \leftrightarrow p$ envolvendo apenas os conetivos
    a) $\sim$ e $\wedge$.
    b) $\sim$ e $\vee$.
    c) $\sim$ e $\to$.