Universidade do Minho — Lic. Ciências da Computação
Departamento de Matemática — 2021/2022

Tópicos de Matemática

Exercícios

6. Cardinalidade

6.1 Em cada caso, diga, justificando, se os conjuntos indicados são equipotentes:

(a) $\{1, 2, 5, 8\}$ e $\{a, b, c\}$.

(b) $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{P}(\{a, b\})$.

(c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n < -25\}$ e $\mathbb{N}$.

(d) $4\mathbb{N}$ e $3\mathbb{Z}$ (onde $nX = \{nx \mid x \in X\}$).

6.2 Sejam A um conjunto e $\{0, 1\}^A$ o conjunto de todas as aplicações de A em $\{0, 1\}$. Para cada subconjunto B de A seja $\chi_B : A \to \{0, 1\}$ a *função característica em A associada a B*, i.e., a aplicação definida por

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \in A \setminus B \end{cases}.$$

(a) Mostre que

i. Para quaisquer $B, C \subseteq A$, se $\chi_B = \chi_C$, então $B = C$.

ii. Para cada aplicação $f : A \to \{0, 1\}$, se tem $f = \chi_B$, onde $B = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$.

(b) Conclua que $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A$.

6.3 Sejam A, B, C conjuntos. Prove que

(a) $A \backsim A$.

(b) Se $A \backsim B$, então $B \backsim A$.

(c) Se $A \backsim B$ e $B \backsim C$, então $A \backsim C$.

6.4 Sejam A, B, C conjuntos. Prove que

(a) $A \times B \sim B \times A$.

(b) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

(c) Se $A \sim B$, então $\mathcal{P}(A) \backsim \mathcal{P}(B)$.

6.5 Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer conjuntos A, B e C:

(a) Se $A \sim B$, então $A \backslash B \sim B \backslash A$.

(b) Se $A \backslash B \sim B \backslash A$, então $A \sim B$.

(c) Se $A \sim B$, então $A \cup C \sim B \cup C$.

(d) Se $A \sim B$, então $A \cap C \sim B \cap C$.

(e) Se $A \cap C \sim B \cap C$ e $C \neq \emptyset$, então $A \sim B$.

(f) Se $A \sim B$ e $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, então $A \cup C \sim B \cup C$.

6.6 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Mostre que:

(a) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $I_n \sim I_m$ se e só se $m = n$.

(b) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, I_m é equipotente a um subconjunto de I_n e I_n não é equipotente a qualquer subconjunto de I_m se e só se $m < n$.

6.7 Sejam A, B conjuntos. Prove que:

(a) Se A é finito, então $A \cap B$ é finito.
(b) Se A é infinito, então $A \cup B$ é infinito.
(c) Se $A \cap B$ é infinito, então A e B são infinitos.
(d) Se A e B são finitos, então $A \cup B$ é finito.
(e) Se A é infinito e $B \neq \emptyset$, então $A \times B$ é infinito.
(f) Se A e B são finitos, então $A \times B$ é finito.
(g) Se $A \subseteq B$, A é finito e B é infinito, então $B \setminus A$ é infinito.

6.8 Prove que os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ são numeráveis.

6.9 Sejam A, B conjuntos. Prove que

(a) Se A é finito e B é numerável, então $A \cup B$ é numerável.
(b) Se A e B são numeráveis, então $A \cup B$ é numerável.
(c) Se A não é contável, B é contável e $B \subseteq A$, então $A \setminus B$ não é contável.
(d) Se A é finito e não vazio e B é numerável, então $A \times B$ é numerável.
(e) Se A e B são numeráveis, então $A \times B$ é numerável.

6.10 Diga quais dos seguintes conjuntos são contáveis:

(a) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (b) $\mathbb{Q} \cap [2, 3)$.
(c) $[3, 4] \cup [5, 6]$. (d) $[0, 1] \times [0, 1]$.
(e) $\{9^x \mid x \in \mathbb{R}\}$. (f) $\{\frac{a}{3} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \text{m.d.c.}(a, 3) = 1\}$.

6.11 Prove que

(a) O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é numerável.
(b) O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais não é numerável.

6.12 Sejam A, B, C conjuntos. Prove que

(a) $|\emptyset| \leq |A|$.
(b) $|A| \leq |A|$.
(c) Se $|A| = |B|$, então $|B| = |A|$.
(d) Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| \leq |C|$.

6.13 Sejam A, B, C conjuntos. Prove que se $|A| < |B|$ e $|B| = |C|$, então $|A| < |C|$.

6.14 Sejam A e B conjuntos finitos tais que $|A| = |B|$ e seja $f : A \to B$ uma função. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes:

(i) A função f é bijetiva. (ii) A função f é injetiva. (iii) A função f é sobrejetiva.

6.15 Sejam A e B conjuntos numeráveis. Prove que $|A| = |B|$.

6.16 Sejam A, B conjuntos. Prove que se B é contável e $|A| \leq |B|$, então A é contável.

6.17 Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $c < d$. Recorrendo ao Teorema de Schröder-Bernstein, mostre que se $]a, b[\subseteq X$ e $]c, d[\subseteq Y$, então $X \sim Y$.