Tópicos de Matemática

Exercícios

4. Funções

4.1 Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de $A \times B$ são funções de A em B.

(a) $\{(b, 1), (c, 2), (a, 3)\}$.
(b) $\{(a, 3), (c, 2), (a, 1)\}$.
(c) $\{(c, 1), (b, 1), (a, 2)\}$.
(d) $\{(a, 1), (b, 3)\}$.
(e) $\{(c, 1), (a, 2), (b, 3), (c, 2)\}$.
(f) $\{(a, 3), (c, 3), (b, 3)\}$.

4.2 Diga qual das seguintes expressões define uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \sin(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $p(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 5}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) $q(x) = \ln(x^4 + 1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) $s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ x^3 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

(e) $t(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{se } x \geq 1 \\ |x| & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$.

(f) $g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x > \pi \\ x & \text{se } x < \pi \end{cases}$.

4.3 Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

(a) Dê exemplo de uma relação de A em B que não seja função.

(b) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A?

4.4 Considere as funções:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } g(x) = x^2 - 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R};$$
$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \text{ definida por } f(x) = m.d.c.(x, 6), \text{ para todo } x \in \mathbb{N}.$$

Determine:

(a) $g(\{-1, 0, 1\})$;
(b) $g(]-\infty, 0])$;
(c) $g(\mathbb{R})$;
(d) $g^{\leftarrow}(\{0\})$;
(e) $g^{\leftarrow}(]-\infty, 0])$;
(f) $f(\{4, 6, 9\}$;
(g) $f(\{x \,|\, x \in \mathbb{N} \wedge \exists y \in \mathbb{N}\, (x = 3y)\}$;
(h) $f^{\leftarrow}(\{2\})$;
(i) $f^{\leftarrow}(\{3, 4, 5\}$.

4.5 Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ definidas por:

$$f(n) = n + 1; \qquad g(n) = 2n; \qquad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Determine:

(a) $f \circ f$;
(b) $f \circ g$;
(c) $g \circ f$;
(d) $g \circ h$;
(e) $f \circ g \circ h$;
(f) $h \circ f$;
(g)$h \circ g$;
(h) $h \circ f \circ g$.

4.6 Dê um exemplo de:

(a) Duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.

(b) Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

4.7 Sejam A, B conjuntos, $f: A \longrightarrow B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$ e $B_1, B_2 \subseteq B$. Mostre que

(a) $f(\emptyset) = \emptyset$.
(b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;
(c) $f^{\leftarrow}(B) = A$.
(d) Se $B_1 \subseteq B_2$, então $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$.
(e) $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$.

4.8 Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja:

(a) não injetiva;
(b) injetiva;
(c) sobrejetiva;
(d) não sobrejetiva.

4.9 Diga, justificando, quais das seguintes funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:

(a) $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_1(x) = 2x - 1$;
(b) $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_2(x) = x + 1$;
(c) $f_3 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$;
(d) $f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f_4(x) = x + 1$;
(e) $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, $f_5(x) = x^2$;
(f) $f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_6(x) = |x| + 2$.

4.10 Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ n+2 & \text{se} \quad n \text{ é par} \end{cases}$$

(a) Determine
  (i) $f(\{3, 4, 8\})$;
  (ii) $f^{\leftarrow}(\{3, 5, 6\})$.
(b) Diga se f é injetiva e se é sobrejetiva.

4.11 Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por

$$f(n) = \begin{cases} |n| & \text{se} \quad -4 \leq n < 3 \\ n+1 & \text{se} \quad n < -4 \text{ ou } n \geq 3 \end{cases}$$

(a) Determine
  (i) $f(\{-6, -5, -4, 2, 3\})$;
  (ii) $f(\mathbb{N})$;
  (iii) $f^{\leftarrow}(\{-4, -3, 3\})$;
  (iv) $f^{\leftarrow}(\mathbb{N})$.
(b) Diga se f é injetiva e se é sobrejetiva.

4.12 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| + 2$, para todo o real x, e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq -2 \\ x+2 & \text{se} \quad x > -2 \end{cases}.$$

(a) Determine $f(\{-2,2\})$ e $f\big(]-2,4]\big)$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{-2,0,1,2\})$.

(c) Diga se $g \circ f$ é injetiva e se é sobrejetiva.

4.13 Sejam A, B conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$. Mostre que se f é injetiva, então $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

4.14 Sejam A, B conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções tais que $f \circ g = id_B$. Mostre que:

(a) f é sobrejetiva;

(b) g é injetiva;

(c) g é sobrejetiva se e só se f é injetiva.

4.15 Sejam A, B, C conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ funções. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras.

(a) Se $g \circ f$ é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

(b) Se $g \circ f$ é injetiva, então g é injetiva.

(c) Se f é injetiva e g é sobrejetiva, então $g \circ f$ é bijetiva.

4.16 Sejam A, B, C conjuntos, $f, g_1, g_2 : A \longrightarrow B$ e $h, k_1, k_2 : B \longrightarrow C$ funções. Mostre que:

(a) Se h é injetiva e $h \circ g_1 = h \circ g_2$, então $g_1 = g_2$.

(b) Se f é sobrejetiva e $k_1 \circ f = k_2 \circ f$, então $k_1 = k_2$.

4.17 Verifique que cada uma das funções seguintes é bijetiva e determine a respetiva inversa.

(a) $$\begin{array}{rrcl} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x-3 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rrcl} h: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

4.18 Sejam A, B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma função bijetiva. Mostre que:

(a) A função $f^{-1} : B \longrightarrow A$ é bijetiva e tem-se $(f^{-1})^{-1} = f$;

(b) $f^{\leftarrow}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\}$, para todo $b \in B$.