Tópicos de Matemática

Exercícios

3. Indução nos Naturais

3.1 Prove, por indução, as seguintes propriedades dos números naturais:

(a) $2+4+6+...+2n = n(n+1)$, para todo $n \geq 1$.
(b) $1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \geq 1$.
(c) $2^0+2^1+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$, para todo $n \geq 1$.
(d) $1.2+2.3+3.4+...+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, para todo $n \geq 1$.
(e) $1+4+9+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.
(f) 5^n-1 é múltiplo de 4, para todo $n \geq 1$.
(g) $2^{3n}-3^n$ é múltiplo de 5, para todo $n \geq 1$.
(h) $n^2 > 2n+1$, para todo $n \geq 3$.
(i) $7n < 2^n$, para todo $n \geq 6$.
(j) $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$.

3.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: n^2+5n+1 é par.

(a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.
(b) Diga, justificando, para que naturais n a propriedade $P(n)$ é verdadeira.

3.3 Para $n \in \mathbb{N}$, define-se $n!$ por $1! = 1$ e $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

(a) Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $2^n < n!$.
(b) Prove que, para todo o natural n tal que $n \geq 4$, $n! \geq n^2$.

3.4 Seja X um conjunto tal que $X \subseteq \mathbb{N}$, $3 \in X$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in X \Rightarrow n+3 \in X.$$

Prove que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

3.5 O seguinte exemplo é bem conhecido como uma alegada "prova" por indução que claramente não pode ser válida. Indique onde se encontra o erro.

Vamos provar que todos os gatos são da mesma cor. Mais precisamente, vamos provar que a afirmação "para qualquer coleção de n gatos, todos os gatos têm a mesma cor" é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que só há um número finito de gatos no mundo inteiro, segue que todos os gatos do mundo têm a mesma cor. Suponhamos que $n = 1$. É certamente verdade que para qualquer coleção com um gato, todos os gatos têm a mesma cor. Supondo o resultado válido para n, vamos agora mostrar o resultado para $n+1$. Consideremos a coleção $\{G_1, \ldots, G_{n+1}\}$ de $n+1$ gatos. As coleções $\{G_1, \ldots, G_n\}$ e $\{G_2, \ldots, G_{n+1}\}$ têm ambas n gatos. Então, todos os gatos das duas coleções têm a mesma cor e, portanto, os gatos de $\{G_1, \ldots, G_{n+1}\}$ têm a mesma cor. Fica assim provado por indução que todos os gatos do mundo têm a mesma cor.

3.6 Recorrendo ao Princípio de Indução Completa, mostre que:

(a) Todo o número natural n pode ser repesentado como a soma de potências distintas de 2, i.e., na forma $n = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_r}$ onde $i_1, i_2, \ldots, i_r$ são inteiros tais que $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r$.
(b) A sequência de Fibonacci (definida por $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$) satisfaz, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq (3/2)^{n-2}$.