Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. Ciências da Computação
2021/2022

Tópicos de Matemática

Exercícios

2. Teoria elementar de conjuntos

2.1 Considere o conjunto $A = \left\{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\right\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

(a) $\left\{a \in A \,|\, a^2 \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $\{a \in A \,|\, a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$

(c) $\left\{a^2 \in \mathbb{R} \,|\, a \in A \wedge a^2 \in A\right\}$

(d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists a \in A \quad a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a}\right\}$

(e) $\left\{b \in \mathbb{Z} \,|\, \exists a \in A \;\; b = a^2\right\}$

(f) $\left\{b \in \mathbb{R} \,|\, \exists a \in A \;\; b^2 = a\right\}$

2.2 Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

(a) $A = \{-1, 1\}$

(b) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

(d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

2.3 De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$, $\{1, 2\}$ e $\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 < n^2 \leq 4\right\}$.

(b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$.

(c) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$.

2.4 Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) $5 \in A$

(b) $\{5\} \in A$

(c) $\{5, 11\} \in A$

(d) $A \subseteq \mathbb{R}$

(e) $\{5, 11\} \subseteq A$

(f) $0 \in A$

(g) $\emptyset \in A$

(h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$

2.5 Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(c) $\emptyset \notin \emptyset$

(d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

2.6 Considere que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

(a) $a \in C$

(b) $b \in A$

(c) $c \notin A$

(d) $d \in B$

(e) $e \notin A$

(f) $f \notin A$

2.7 Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

(a) $A \subseteq B$ e $A \notin B$

(b) $A \nsubseteq B$ e $A \in B$

c) $A \nsubseteq B$ e $A \notin B$

(d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

2.8 Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C.

(a) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$ então $A \in C$.

(b) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

(c) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \in C$.

(d) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \subseteq C$.

2.9 Sejam $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x = 2y\}$ e $C = \left\{x^2 \mid x \in A\right\}$. Determine

(a) $A \cup C$ (b) $A \cup A$ (c) $A \cup B$ (d) $C \cup B$
(e) $B \cup C \cup A$ (f) $A \cap B$ (g) $B \cap B$ (h) $A \backslash B$
(i) $C \backslash A$ (j) $B \backslash B$

2.10 Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que

(a) $A \cup A = A$
(b) $A \cup B = B \cup A$
(c) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(d) se $A \cup B = \emptyset$ então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$
(e) $A \backslash B \subseteq A$
(f) $A \backslash \emptyset = A$
(g) $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$
(h) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$
(i) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$
(j) se $A \subseteq B$ então $A \cup (B \backslash A) = B$
(k) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
(l) $X \setminus (X \setminus A) = A$

2.11 Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

2.12 Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C.

(a) Se $C \subseteq A \cup B$, então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.
(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$, então $C \subseteq A \cup B$.
(c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.
(d) Se $A \cup B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.
(e) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.
(f) Se $C \subseteq A \cap B$, então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.
(g) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$, então $C \subseteq A \cap B$.
(h) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cap B \subseteq C$.
(i) Se $A \cap B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.
(j) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$, então $A \cap B \subseteq C$.

2.13 Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respectivamente:

(a) $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
(b) $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

2.14 Sejam $A = \{1,5,7\}$ e $B = \{\emptyset, 7, \{1,5,7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

2.15 Determine todos os elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

2.16 Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C:

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
(b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

2.17 Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{5\}$.

(a) Determine

i) $A \times C$ e $C \times A$ ii) $(A \times C) \setminus (C \times A)$ iii) $A \times B \times C$
iv) $A \times \emptyset \times C$ v) C^3 vi) $C^3 \times B$

(b) Verifique que os conjuntos $C^3 \times B$ e $B \times C^3$ não são iguais.
(c) Qual o número de elementos dos conjuntos $A^4 \times B \times C^2$ e $C^3 \times B \times A$?

2.18 Sejam A, B e C conjuntos. Prove que:

(a) se $A \subseteq B$ então $A \times C \subseteq B \times C$

(b) se $A \subseteq B$ então $C \times A \subseteq C \times B$

(c) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$

(d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

2.19 Sejam A e B conjuntos. Prove que $(A \times A)\backslash(B \times B) = ((A\backslash B) \times A) \cup (A \times (A\backslash B))$.

2.20 Sejam A e B conjuntos tais que $A \neq B$. Suponha que C é um conjunto tal que $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

2.21 Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?

2.22 Dê exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de conjuntos A, B e C tais que:

(a) $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$

(b) $B = C$ e $A \cap B \neq A \cap C$

(c) $A \cap \emptyset = A$

(d) $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \nsubseteq B$

(e) $A \cap B = A \cap C$ e $B \neq C$

(f) $A \times (B\backslash C) = A \times C$ com $B, C \neq \emptyset$

(g) $\mathcal{P}(A) \cap A \neq \emptyset$

(h) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ com $A, B \neq \emptyset$

2.23 Calcule a união e a interseção das seguintes famílias de conjuntos:

(a) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 2n\}$.

(b) $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{-n, 0, n\}$.

(c) $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}\right\}$.

(d) $\{D_x\}_{x\in\mathbb{R}^+}$ em que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, $D_x = [-x/2, x+2[$.

2.24 Dê exemplo de uma família de conjuntos, indexada pelo conjunto $\mathbb{N}$, de tal modo que os conjuntos da família sejam todos diferentes entre si e:

(a) a união dos conjuntos da família seja $\mathbb{R}^+$ e a interseção seja o conjunto vazio.

(b) a união dos conjuntos da família seja $(2, 8)$ e a interseção seja $[3, 6]$.

2.25 Sejam A um conjunto A e $\{B_i\}_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de A. Mostre que:

(a) $\bigcap_{i\in I} B_i \subseteq B_i$, para todo $i \in I$.

(b) $\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \setminus A = \bigcup_{i\in I} (B_i \setminus A)$.

(c) $A \setminus \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} (A \setminus B_i)$.

(d) $A \times \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} (A \times B_i)$.