Universidade do Minho — Lic. Ciências da Computação
Departamento de Matemática — 2021/2022

Tópicos de Matemática

Exercícios

1. Noções elementares de lógica

1.1 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

(a) $(\neg\,(p_1 \vee p_2))$

(b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$

(c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($

(d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow\perp)$

(e) $(\perp)$

(f) $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$

1.2 Nas seguintes implicações, identifique o antecedente e o consequente:

(a) Eu envio-te a encomenda só se me enviares o teu endereço.

(b) Para ser um cidadão português basta ter nascido em Portugal.

(c) É necessário ter uma password válida para aceder ao servidor.

(d) Chove em Braga sempre que sopra vendo de nordeste.

(e) É suficiente gostar de matemática para ser aprovado a Tópicos de Matemática.

1.3 Considerando que p e q representam, respetivamente, as frases ‘O João caiu.” e “O João magoou-se.”, escreva simbolicamente as seguintes frases:

(a) O João caiu e magoou-se.

(b) O João caiu mas não se magoou.

(c) Não é verdade que o João caiu e se magoou.

(d) Sempre que o João cai, magoa-se.

(e) O João só se magoa se cair.

1.4 Sejam p : “O piquenique de hoje será cancelado.”, q : “Hoje está vento.” e r : “Hoje está a chover.”. Traduza as seguintes expressões em palavras:

(a) $q \wedge r$	(b) $\neg q \vee p$	(c) $p \leftrightarrow (q \vee r)$	(d) $\neg(q \vee r)$
(e) $\neg q \vee \neg r$	(f) $(q \vee r) \rightarrow p$	(g) $(p \wedge \neg q) \vee r$	(h) $\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$

1.5 Considere as proposições *7 é um número inteiro par*, *3+1=4* e *24 é divisível por* 8 representadas, respetivamente, por p_0, p_1 e p_2.

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

(i) $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.

(ii) Não é verdade que: 7 é ímpar ou $3 + 1 = 4$.

(iii) Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

(i) $p_0 \vee (\neg p_2)$

(ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$

(iii) $(\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1 \vee p_0)$

1.6 Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:

(a) A Terra é redonda.

(b) $2 + x = 3$ e 2 é par.

(c) $(25 \times 2) + 7$.

(d) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.

(e) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?

(f) $4 < 3$.

(g) Se $x \geq 2$ então $x^3 \geq 1$.

(h) A U.M. é a melhor academia do país.

1.7 Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:

(a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$ (e representa o *Número de Nepper*).

(b) 1 e -1 são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.

(c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.

(d) $\sqrt{530} < 25 \to 530 < 25^2$

(e) 7^4 é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

1.8 Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas proposicionais:

(a) $p \vee (\neg p)$
(b) $\neg(p \vee q)$
(c) $p \wedge \neg(p \vee q)$
(d) $p \wedge (\neg p \vee q)$
(e) $\neg(p \to \neg q)$
(f) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
(g) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
(h) $p \to (q \to r)$
(i) $p \wedge \neg(q \to r)$
(j) $(p \leftrightarrow \neg r) \vee (q \wedge r)$
(k) $p \leftrightarrow (q \vee p)$
(l) $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$

1.9 Suponha que p é uma proposição verdadeira, q é uma proposição falsa, r é uma proposição falsa e s é uma proposição verdadeira. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $p \vee r$
(b) $(r \wedge s) \vee q$
(c) $\neg(p \wedge q)$
(d) $\neg s \vee \neg r$
(e) $(s \wedge p) \vee (q \wedge r)$
(f) $r \vee (s \vee (p \wedge q))$
(g) $r \to q$
(h) $p \leftrightarrow r$
(i) $(q \leftrightarrow s) \wedge p$
(j) $s \to (p \to \neg s)$
(k) $((q \to s) \leftrightarrow s) \wedge \neg p$
(l)$(s \to p) \leftrightarrow \neg(r \vee q)$

1.10 Admitindo que p_0, p_1 e p_2 representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

(a) $p_0 \wedge p_1$
(b) $p_0 \vee p_1$
(c) $p_0 \to p_1$
(d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

1.11 Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

(b) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

(c) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

(d) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

(e) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

(f) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

1.12 De entre as seguintes fórmulas proposicionais, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p \to (p \vee q)$;
(b) $(p \to (p \vee q)) \wedge q$
(c) $\neg(p \wedge q) \to (p \vee q)$;
(d) $(p \vee \neg p) \to (p \wedge \neg p)$
(e) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$;
(f) $\neg(p \to (q \to p))$

1.13 Indique quais dos pares de fórmulas proposicionais que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\neg(p \wedge q)$; $\neg p \wedge \neg q$
(b) $p \to q$; $q \to p$
(c) $\neg(p \to q)$; $p \wedge (q \to (p \wedge \neg p))$
(d) $p \to (q \to r)$; $\neg(\neg r \to \neg q) \to \neg p$

1.14 Para cada uma das fórmulas a seguir indicadas, encontre uma fórmula logicamente equivalente e que envolva apenas os conectivos $\wedge$ e $\neg$.

(a) $p \vee \neg q$
(b) $\neg(p \wedge \neg q) \vee q$
(c) $(p \to \neg q) \vee r$
(d) $\neg p \leftrightarrow q$

1.15 Numa cidade os habitantes são de dois tipos: os que mentem sempre (F) e os que dizem sempre a verdade (V). Consideremos 3 habitantes A, B e C dessa cidade. Em cada uma das alíneas, diga se é possível determinar o tipo (V ou F) de cada um desses habitantes, sabendo que eles disseram:

(a) A: B e C são F's
B: A é V
C: A é F

(b) A: B e C são do mesmo tipo
B: eu e C somos V's
C: B é F

1.16 Suponha que o domínio de variação de x é o conjunto de alunos da Licenciatura em Ciências da Computação e considere os predicados na variável x: $p(x)$: "x sabe programar em C^{++}", $q(x)$: "x gosta de Lógica". Traduza as seguintes quantificações por palavras:

(a) $\forall_x \; p(x)$
(b) $\exists_x \; q(x)$
(c) $\forall_x \; (\neg q(x) \leftrightarrow \neg p(x))$
(d) $\exists_x \; (p(x) \vee q(x))$
(e) $\forall_x \; (p(x) \to q(x))$
(f) $\exists_x \; (p(x) \wedge q(x))$

1.17 Suponha que os possíveis valores de x são cães e sejam $p(x)$: "x é preto", $q(x)$: "x tem quatro anos de idade", $r(x)$: "x tem manchas brancas". Traduza as seguintes quantificações para linguagem simbólica.

(a) Existe um cão preto.
(b) Todos os cães têm quatro anos de idade.
(c) Existe um cão preto com manchas brancas.
(d) Todos os cães com quatro anos têm manchas brancas.
(e) Todos os cães são pretos sempre que não têm manchas brancas.
(f) Todos os cães são pretos se e só se não têm manchas brancas.
(g) Não existem cães pretos.

1.18 Exprima cada uma das seguintes proposições como quantificações:

(a) A equação $x^2 - 4 = 0$ tem uma solução real positiva.
(b) 1000000 não é o maior número natural.
(c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.
(d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

1.19 Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

(i) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.
(ii) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.
(iii) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.
(iv) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

1.20 Escreva quantificações equivalentes à negação de cada uma das seguintes proposições:

(a) Todos os rapazes são simpáticos.
(b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.
(c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x.
(d) Existe um número natural que é maior que todos os outros números naturais.
(e) Existe uma casa tal que qualquer pessoa que lá entre fica com sardas.

1.21 Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

(a) $\forall_x \exists_y \;\; x + y = 0$ (b) $\exists_x \forall_y \;\; x + y = 0$
(c) $\exists_x \forall_y \;\; x + y = y$ (d) $\forall_x \;\; (x > 0 \to \exists_y \;\; xy = 1)$

Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conectivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

1.22 Considerando que p representa a proposição $\forall_{x \in A}((\exists_{y \in A}\, x = 5y) \to (y = 2 \vee y^2 = 9))$,

(a) Verifique se p é verdadeira para:
(i) $A = \{2, 3, 10, 15\}$; (ii) $A = \{3, 5, 15, 25\}$.
(b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

1.23 Considere que A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e que p representa a proposição

$$\forall_{x \in A}(x < 4 \to \exists_{y \in A}\,(y \leq x \to y^2 < 16)).$$

(a) Dê exemplo, justificando, de um conjunto A não vazio onde:
(i) p seja verdadeira; (ii) p seja falsa.
(b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

1.24 Considerando que p, q, r, s e t representam proposições, averigue a validade dos seguintes argumentos:

(a)
$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ (p \vee q) \to \neg r \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c} p \to q \\ r \wedge \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{c} p \to q \\ (p \vee q) \to (p \to r) \\ \neg q \vee r \\ \hline \therefore p \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg r \to \neg q \\ s \to t \\ p \vee s \\ \hline \therefore r \vee t \end{array}$$

1.25 Averigue a validade dos seguintes argumentos:

(a) O João afirma: "Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão". No dia seguinte o João comentou: "Ontem não fui ao cinema." Em resposta, a Joana concluiu: "Então viste um filme na televisão!".

(b) O Carlos, o João e o Manuel, supeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

Com base nestes depoimentos, o inspector responsável pela investigação concluiu que o João é o culpado.

(c) A Maria afirmou: "Se hoje chover e fizer frio, vai nevar". No dia seguinte a Maria comentou: "Ontem fez frio e nevou." Em resposta, a Rita concluiu: "Então choveu".

1.26 Sejam a, b e c três números reais tais que $a > b$. Mostre que se $ac \leq bc$, então $c \leq 0$.

1.27 Mostre que, para todo o número real a, se $a^2 \geq a$, então $a \leq 0$ ou $a \geq 1$.

1.28 Mostre que se a e b são reais positivos tais que $ab = c$, então $a \leq \sqrt{c}$ ou $b \leq \sqrt{c}$.

1.29 Mostre que se x e y são inteiros não simultaneamente nulos e $y + x = 2y - x$, então $y \neq 0$.

1.30 Mostre que a soma de dois números inteiros ímpares é um número inteiro par.

1.31 Mostre que a soma de dois naturais consecutivos é um número ímpar.

1.32 Prove que, para todo o natural n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

1.33 Sejam m e n inteiros. Mostre que se $n^2 - 6n + 5$ é par, então n é ímpar.

1.34 Prove que, para todo o inteiro n, se $n^2 + 2n - 7$ não é múltiplo de 4, então n é par.

1.35 Mostre que, para qualquer inteiro n, se $(n+1)^2$ não é múltiplo de 2, então $3n^2+6n-3$ não é múltiplo de 6.

1.36 Prove que se n e m são inteiros tais que $12n - 40m = 20$ e $m \neq 1$, então $n \neq 5$.

1.37 Sejam a e b números reais. Mostre que se $5a + 25b = 1723$, então a ou b não é um número inteiro.

1.38 Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

1.39 Prove que o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

1.40 Mostre que, para todo o número inteiro n, $n \times 0 = 0 \times n = 0$.

1.41 Mostre que, para todo o número inteiro n, $n^2 + n$ é par.

1.42 Encontre um contra-exemplo para cada das afirmações seguintes:

(a) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.

(b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.

(c) Se a, b, c e d são naturais tais que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, então $a \leq c$ e $b \leq d$.

(d) Se $x^4 = 1$, com $x \in \mathbb{R}$, então $x = 1$.