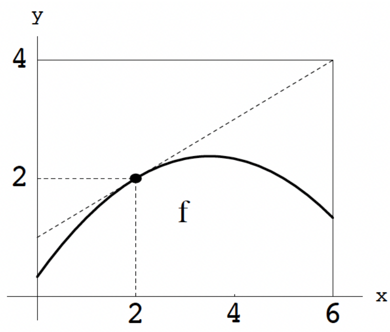
Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2 valores) A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(x, y) = (2, 2)$. Sendo $g(x) = (f(2x) + 1)^3$, qual o valor da derivada $g'(1)$?



Exercício 2. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3\,\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{1+8\cos x}}\,dx.$

II. Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx.$

Exercício 3. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{0} x \operatorname{arctg}(x^2)\, dx.$ II. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x\, dx.$

Exercício 4. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule o integral $\displaystyle\int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}}\, dx,$ efetuando a substituição $x = \operatorname{sen}^2 t.$

II. Calcule o integral $\displaystyle\int_{1}^{2} x\,\sqrt{x-1}\, dx,$ efetuando a substituição $x - 1 = t^2.$

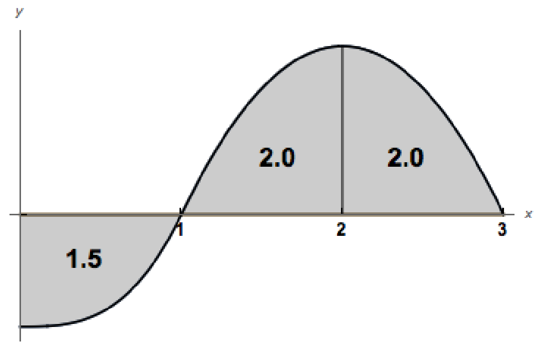
Exercício 5. (3 valores) Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, e o eixo das abcissas, que correspondem às abcissas dos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$, respetivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.

Nestas condições, considere a função $F : [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{\frac{3+x}{2}} f(t)\, dt$.

(a) Determine os valores de $F(-3)$, $F(-1)$, $F(1)$ e $F(3)$.

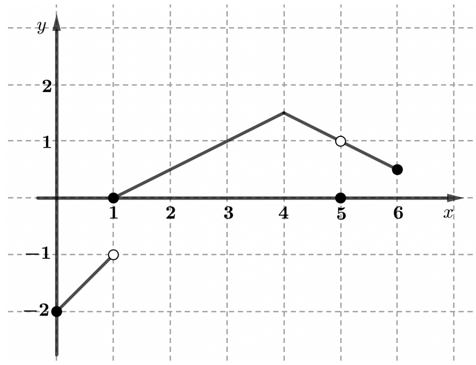
(b) Determine expressões para $F'(x)$ e $F''(x)$.

(c) Represente F graficamente.



Exercício 6. (2 valores) Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq -2 \wedge 1 \leq y \leq 2 - x^2\}$, fazendo previamente um esboço da região R.

Exercício 7. (2.5 valores) Considere a função $f : [0,6] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte e seja $F\colon [0,6] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.



(a) Determine $a \in \,]0,6]$ tal que $F(a) = \frac{1}{4}$.

(b) A função f é primitivável? ________________,

porque ____.

Exercício 8. (3 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$, então f é estritamente crescente.

(b) Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f'(x) = e^x(x+7)(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$, então f tem no máximo três zeros.

(c) Existem duas funções $f, g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis, tais que $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in [0,2]$ e $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 g(x)\,dx$.