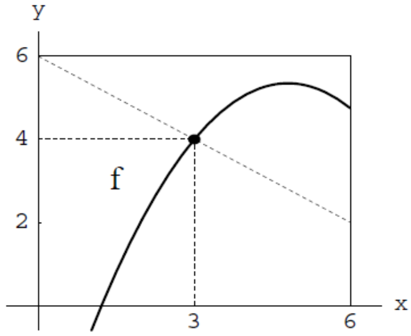
Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2 valores) A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto $(x, y) = (3, 4)$. Sendo $g(x) = \left[f(x^3 - 2x + 4)\right]^2$, qual o valor da derivada $g'(1)$?



Exercício 2. (2.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -4 + e^{-3x} + 3x$.

(a) Determine os limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Determine o número de zeros de f.

Exercício 3. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\displaystyle\int \frac{x - (\operatorname{arcsen}(3x))^3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$

II. Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 5}{(x-1)^2(x+2)}\,dx.$

Exercício 4. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx.$

II. Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 4\,\ln(1+x)}{x \operatorname{sen} x}.$

Exercício 5. (2.5 valores) Calcule o integral $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}}\,dx$, efetuando a substituição $x = \operatorname{sen}^2 t$.

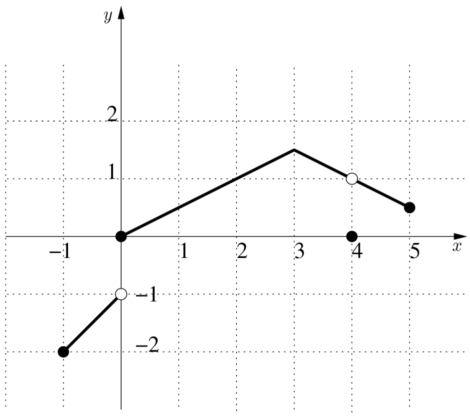
Exercício 6. (2.5 valores) Calcule a área da região $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2 - x^2\}$, fazendo previamente um esboço da região $\mathcal{R}$.

Exercício 7. (2.5 valores) Considere a função $f : [-1,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte e seja $F\colon [-1,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$.

(a) Determine $a \in]-1,5]$ tal que $F(a) = \frac{1}{2}$.

(b) A função f é primitivável? ____________,

porque ______________________________.



Exercício 8. (3 valores) Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, e o eixo das abcissas, que correspondem às abcissas dos intervalos $[0,1]$ $[1,2]$ e $[2,3]$, respetivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.

Nestas condições, considere a função $F : [-4,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{\frac{4+x}{3}} f(t)\,dt$.

(a) Determine os valores de $F(-4)$, $F(-1)$, $F(2)$ e $F(5)$.

(b) Determine expressões para $F'(x)$ e $F''(x)$.

(c) Represente F graficamente.