Licenciatura em Ciências da Computação

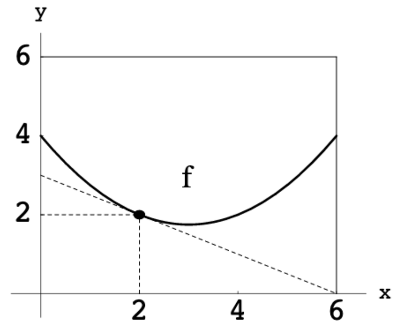
2º Teste de Cálculo:: 11 de janeiro de 2021

Duração :: 2h

Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2 valores) A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(x, y) = (2, 2)$. Sendo $g(x) = (f(x) + 1)^3$, qual o valor da derivada $g'(2)$?



Exercício 2. (2.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 + 5x - e^{5x}$.

(a) Determine os limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Determine o número de zeros de f.

Exercício 3. (2 valores) Considere a função bijetiva $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = \mathrm{sh}\sqrt{x}$.
Mostre que $f^{-1}(x) = \ln^2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Exercício 4. (1.5 valores) Calcule $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{1+5\cos x}}\,dx$.

Exercício 5. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

II. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \mathrm{arcsen}\,x\,dx$.

Exercício 6. (2 valores) Calcule o integral $\displaystyle\int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}}\,dx$, efetuando a substituição $x = \operatorname{sen}^2 t$.

Exercício 7. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x-1)^2}\,dx$.

II. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \operatorname{sen} x - e^x}{\ln(x^2+1)}$.

Exercício 8. (2 valores) Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$, fazendo previamente um esboço da região $\mathcal{R}$.

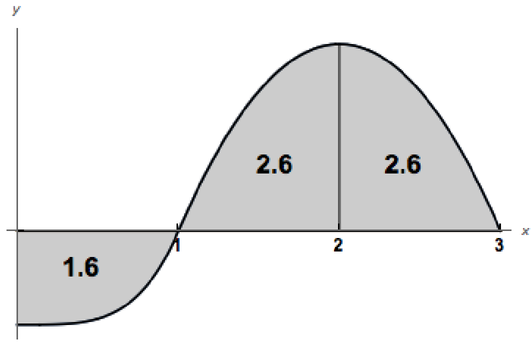
Exercício 9. (3 valores) Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, e o eixo das abcissas, que correspondem às abcissas dos intervalos $[0,1]$, $[1,2]$ e $[2,3]$, respetivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.

Nestas condições, considere a função $F : [-4,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{\frac{4+x}{3}} f(t)\, dt$.

(a) Determine os valores de $F(-4)$, $F(-1)$, $F(2)$ e $F(5)$.

(b) Determine expressões para $F'(x)$ e $F''(x)$.

(c) Represente F graficamente.



Exercício 10. (1 valor) Diga, justificando, se a seguinte proposição é **verdadeira** ou **falsa**: Existem duas funções $f, g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis, tais que $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in [0,2]$ e $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 g(x)\, dx$.