Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMat

2º Teste
13 · 01 · 2020

Cálculo
LCC
2019/2020

Duração: 1 hora e 30 minutos

Nome: **Número:**

- **Responda às questões 1 a 6 justificando devidamente as suas respostas.**
- **Nas perguntas de verdadeiro/falso cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0.25 valores.**

Questão 1 [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Estude a continuidade da função f.

b) Caraterize a função derivada de f.

Questão 2 [1.5 valores] Calcule, ou mostre que não existe, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{1 - \cos x}$.

Questão 3 [2.5 valores] Calcule cada um dos seguintes integrais indefinidos:

a) $\displaystyle\int \frac{1 + \operatorname{arctg}^2(2\,x)}{1 + 4\,x^2}\,dx$;

b) $\displaystyle\int \ln(1 - x)\,dx$.

Questão 4 [2 valores] Usando a substituição $x = \operatorname{sen} t$, calcule o integral definido

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Questão 5 [2 valores] Considere a região do plano R delimitada pelas curvas

$$x = 0, x = 2, y = \sqrt{x} \text{ e } y = -x + 2.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região R.

b) **Estabeleça** um integral, ou a soma de integrais, que lhe permita calcular a área da região R. (Não calcule o valor da área)

Questão 6 [2 valores] Mostre que se $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Se $\ell \neq 0$, a afirmação

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \ell, \text{ então } \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

é verdadeira? Justifique.

Questão 7 [7 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

	V	F
a) A soma de duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótonas é uma função monótona.	○	○
b) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sh}(x^2)$ é invertível.	○	○
c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então f atinge um máximo e um mínimo.	○	○
d) Se a função $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ é derivável e existe $a \in [0,2]$ tal que $f'(a) = 0$, então f tem um extremo em a.	○	○
e) Se $P(x) = x + 2$ é simultaneamente o polinómio de Taylor de ordem 1 de uma função f em torno do ponto 1 e o polinómio de Taylor de ordem 1 de uma função g em torno do ponto 0, então $f(1) = g(0)$ e $f'(1) = g'(0)$.	○	○
f) A função f definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ é primitivável.	○	○
g) Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, então f é integrável em $[0,1]$.	○	○

(FIM)