Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo EC

Licenciatura em Ciências da Computação

Teste 2 :: 9 de janeiro de 2019

Nome ____________________ Número __________

As respostas aos grupos I a III são dadas na folha do enunciado.
No Grupo I cada resposta certa vale 0,75 valores e cada resposta errada -0,25 valores.
No Grupo II cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada -0,25 valores.

I

[3 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

	V	F
a) Se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável então a sua derivada é uma função contínua.	○	○
b) Se $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ então F é uma função contínua.	○	○
c) Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função é integrável. Se $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 1$ e $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = -1$ então f tem pelo menos um zero.	○	○
d) Se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função primitivável então é uma função contínua.	○	○

II

[2 valores] Em cada uma das alíneas seguintes, identifique a afirmação verdadeira.

a) O integral $\displaystyle\int \frac{8}{x(x^2-4)\,dx}$ é igual a:

○ $\displaystyle\int \frac{8}{x}\,dx \int \frac{1}{x^2-4}\,dx$;

○ $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$;

○ $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx$;

○ nenhuma das anteriores.

b) Considere o integral $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$. A mudança de variável $x = t^2$ permite escrever o integral como:

○ $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{t+1}\,dt$;

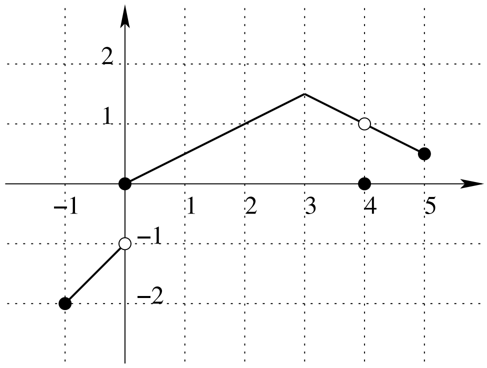
○ $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{t+1}\,dt$;

○ $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t^2+t}\,dt$;

○ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2+t}\,dt$.

III

[5 valores] Considere a função $f : [-1, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa e seja $F : [-1, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\, dt$.



a) Indique o conjunto dos pontos onde não existe derivada de f.

b) Determine, caso exista, $f'(\pi)$.

c) Determine $F(3)$, i.e., $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(t)\, dt$.

d) Determine $a \in]-1, 5]$ tal que $F(a) = 0$.

e) Apresente, caso exista, uma primitiva da função f.

IV

Questão 1. [2 valores] Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2 - x + \ln(x - 1)}{x^3 - 3x^2 + 4}$.

Questão 2. [2 valores] Considere uma função bijetiva e derivável $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 0$ e $f'(1) = 1$. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função tal que $g(x) = \operatorname{sh} f(x)$.

a) Calcule $g(1)$ e $g'(1)$.

b) Calcule $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

Questão 3. [3 valores] Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2 + e^{1-x}}\, dx$;

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (x^2 + 1) \cos x\, dx$.

Questão 4. [3 valores] Considere a região do plano

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x \wedge y \leq e^x\right\}.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região R.

b) Calcule o valor da área da região R.