Universidade do Minho — LCC

Cálculo (2017/2018) — **Teste 2**

---

1. (1 valor)

   (a) Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto $a \in A$, onde A é um intervalo aberto. Usando a definição, escreva a expressão que traduz a continuidade de f em a. Use quantificadores.

   (b) Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em, pelo menos, um ponto.

2. (2 valores)

   (a) Mostre que a equação $\ln x = \sin x + \dfrac{\pi}{2}$ tem uma raíz no intervalo $]\pi, 2\pi[$. Justifique.

   (b) Diga, justificando, se $f : [0, 2[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ atinge algum dos seus extremos.

3. (2 valores) Sabendo que $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

   (a) Mostre que $\cosh(x) = \cosh(-x)$ e $\sinh(x) = -\sinh(-x)$.

   (b) Represente graficamente a função tangente hiperbólica no seu domínio.

   (c) Mostre que $\tanh^2(x) = 1 - \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.

4. (1 valor)

   (a) Represente graficamente a função $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ dada por $\arcsin(x) = (\sin)^{-1}(x)$.

   (b) Determine $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{11\pi}{4}\right)\right)$.

5. (4 valores)

   (a) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in A$ um ponto de acumulação. Defina derivada de f em a.

   (b) Usando a definição, determine a derivada da função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

   (c) Diga, justificando, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é derivável.

   (d) Mostre que se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in A \cup A'$, então f é contínua em a.

6. (1 valor) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$.

7. (2 valores) Calcule as primitivas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{4+e^{2x}}dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{(3+e^x)^3}}dx$

8. (2 valores)

   (a) Enuncie o teorema fundamental do cálculo.

   (b) Mostre que se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, com $L > 0$, é integrável e tal que $f(x) = -f(-x)$, então

$$\int_{-L}^{L} f(x) = 0.$$

9. (3 valores) Resolva os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_1^e \ln(\sqrt{x})dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, usando a substituição de variável $x = \sin t$, nos domínios apropriados, e $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos x}{2}$.

10. (2 valores) Determine a área do domínio plano limitado pelas curvas de equação $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.