



Nome:

Número:

**Justifique, convenientemente, todas as respostas.**

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional  $3,0(37)$  sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação  $|x + 1| \geq |x - 5|$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto  $A = \left\{ -1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup ([2, \pi] \cap \mathbb{Q})$ .

- (a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto  $A$ .
- (b) Determine os seguintes conjuntos: o interior ( $\overset{\circ}{A}$ ), a aderência ( $\overline{A}$ ) e o derivado ( $A'$ ) do conjunto  $A$ .

Exercício 4.

1. (1 valor) Considere o conjunto  $S = [1, 3[ \cup ]4, +\infty[$ . Apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em  $S$  que seja não monótona, convergente, com limite em  $\mathbb{R} \setminus S$ .

2. (1 valor) Diga, justificando, se a proposição seguinte é **verdadeira** ou **falsa**:

A sucessão  $(u_n)_n$  de termo geral  $u_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \leq 70 \\ \frac{n \cos n}{3n^2 + 5} & \text{se } n > 70 \end{cases}$  é divergente.

Exercício 5.

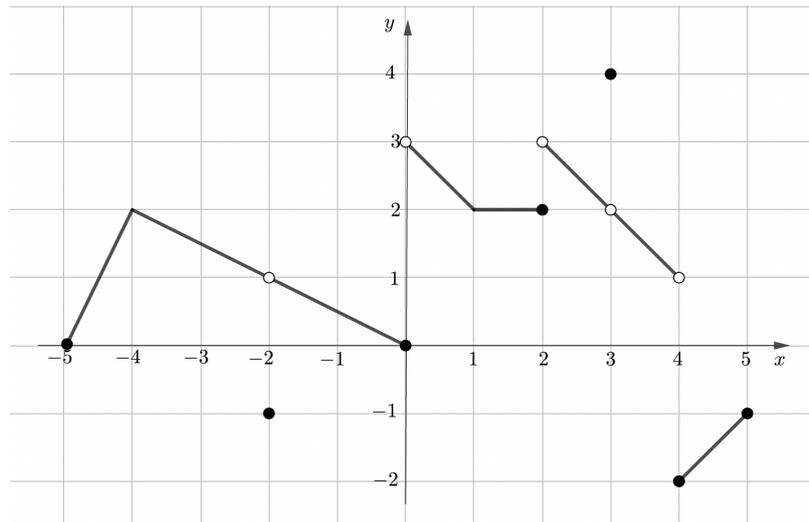
1. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Estude a natureza da série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \cos n}{e^n}$ . II. Verifique se a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{n^6 + 1}$  é absolutamente convergente.

2. (1.5 valores) Calcule a soma da série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{(-1)^{n+2}}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{3^{n+1}} \right)$ .

Exercício 6. (2.5 valores) Considere a função  $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.

- (a) Determine o contradomínio de  $f$ .
- (b) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de  $f$ .
- (c) Determine  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x^2 + 1}{x^2}\right)$ .



- (d) Determine, justificando, o maior valor positivo para  $\delta$  de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x + 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < 1.$$

Exercício 7. (1.5 valores) Dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{3 + |x^2 - 1|}$ , determine  $f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{6}\right]\right)$ .

Exercício 8. (3 valores) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ |x + 1| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Determine, justificando, o domínio de continuidade da função  $f$ .

Exercício 9. (1 valor) Apresente um exemplo de duas funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  descontínuas e tais que  $(g \circ f)(x) = 2$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Exercício 10. (2 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

- (a) Existe uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua que nunca se anula e que toma valores positivos e negativos.
- (b) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(c) = \frac{3f(0) + f(1)}{4}$ .