Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional $2,0(27)$ sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação $|x+2| < |x-4|$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto $A = \left\{2 + \frac{(-1)^n}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup ([\pi, 6] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}))$.

(a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto A.

(b) Determine os seguintes conjuntos: o interior ($\mathring{A}$), a aderência ($\overline{A}$) e o derivado (A') do conjunto A.

Exercício 4.

1. (1 valor) Considere o conjunto $S = [0, 2[\cup]3, +\infty[$. Apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja não monótona, convergente, com limite em $\mathbb{R} \backslash S$.

2. (1 valor) Diga, justificando, se a proposição seguinte é **verdadeira** ou **falsa**:

A sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = \begin{cases} n^2 & \text{se} \quad n \leq 50 \\ \dfrac{n \operatorname{sen} n}{2\,n^2 + 3} & \text{se} \quad n > 50 \end{cases}$ é divergente.

Exercício 5.

1. (2 valores) Responda a <u>**uma e uma só**</u> das duas questões seguintes:

I. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \operatorname{sen} n}{e^n}$. **II.** Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{n^5 + 1}$ é absolutamente convergente.

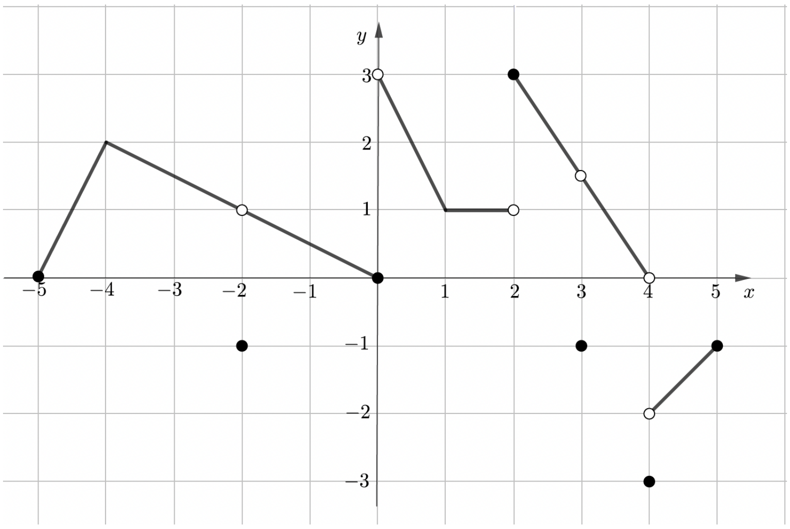
2. (1.5 valores) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{(-1)^{n+2}}{5^{n-1}} + \frac{2^n}{3^{n+1}} \right)$.

Exercício 6. (2.5 valores) Considere a função $f : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.

(a) Determine o contradomínio de f.

(b) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de f.

(c) Determine $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x^2-1}{x^2}\right)$.



(d) Determine, justificando, o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < 1\,.$$

Exercício 7. (1.5 valores) Dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{2 + |x^2 - 5|}$, determine $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{11}, +\infty\right[\right)$.

Exercício 8. (3 valores) Considere a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x\in\mathbb{Z} \\ -x^2+1 & \text{se} \quad x\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \\ |x-1| & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

Determine, justificando, o domínio de continuidade da função f.

Exercício 9. (1 valor) Apresente um exemplo de duas funções $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ descontínuas e tais que $(f\circ g)(x)=2$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Exercício 10. (2 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) Existe uma função $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores positivos e negativos.

(b) Se $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é contínua, então existe $d\in\mathbb{R}$ tal que $g(d)=\dfrac{2\,g(0)+g(1)}{3}$.

FIM