Cálculo

Licenciatura em Ciências da Computação

1º Teste :: 16 de novembro de 2022

Duração :: 2h

Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional $1,0(17)$ sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação $|x+2| \geq |x-4|$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : \; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left([\pi, 5] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})\right).$

(a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto A.

(b) Determine os seguintes conjuntos: o interior ($\mathring{A}$), a aderência ($\overline{A}$) e o derivado (A') do conjunto A.

Exercício 4.

1. (1 valor) Considere o conjunto $S = [0, 1[\cup]2, +\infty[$. Apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja não monótona, convergente, com limite em $\mathbb{R} \backslash S$.

2. (1 valor) Diga, justificando, se a proposição seguinte é **verdadeira** ou **falsa**:

A sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = \begin{cases} n^2 & \text{se} \quad n \leq 50 \\ \dfrac{n \cos n}{2\, n^2 + 1} & \text{se} \quad n > 50 \end{cases}$ é divergente.

Exercício 5.

1. (2 valores) Responda a **<u>uma e uma só</u>** das duas questões seguintes:

I. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \operatorname{sen} n}{e^n}$. **II.** Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{n^4 + 2}$ é absolutamente convergente.

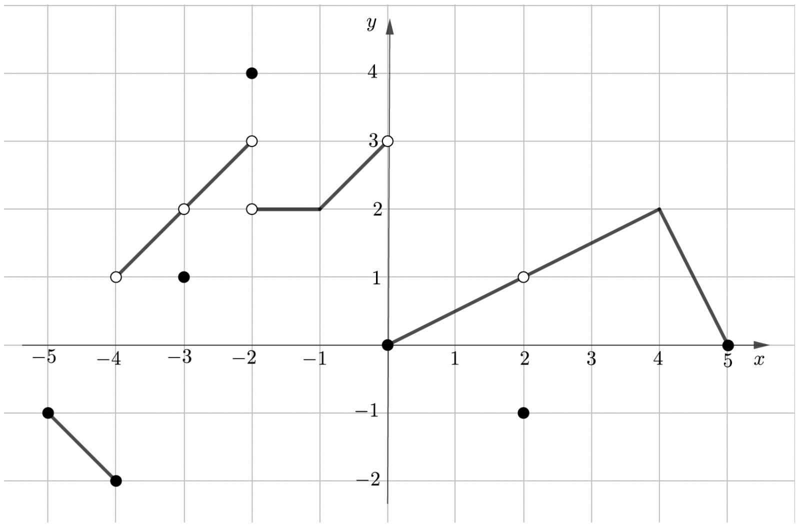
2. (1.5 valores) Calcule a soma da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{(-1)^{n+2}}{5^n} + \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} \right)$.

Exercício 6. (2.5 valores) Considere a função $f : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.

(a) Determine o contradomínio de f.

(b) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de f.

(c) Determine $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{-2x^2+1}{x^2}\right)$.



(d) Determine, justificando, o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < 1 \,.$$

Exercício 7. (1.5 valores) Dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{2+|x^2-1|}$, determine $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{7}, +\infty\right[\right)$.

Exercício 8. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ -x^2+1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \\ |x-1| & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

Determine, justificando, o domínio de continuidade da função f.

Exercício 9. (1 valor) Apresente um exemplo de duas funções $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínuas e tais que $(f \circ g)(x) = 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 10. (2 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) Existe uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores positivos e negativos.

(b) Se $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = \dfrac{f(0)+2f(1)}{3}$.

FIM