Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional $4,55(6)$ sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação $|2x+1| \geq |x+2|$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : \; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left([1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \right).$$

(a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto A.

(b) Determine o derivado (A') do conjunto A.

Exercício 4.

1. (2 valores) Considere o conjunto $S =]2,3[\cup]6,+\infty[$. Em cada alínea apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja:

(a) não monótona e convergente para 8; (b) não majorada e admita uma subsucessão convergente para 2.

2. (1 valor) Diga, justificando, se a proposição seguinte é **verdadeira** ou **falsa**:

A sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = \begin{cases} 3n & \text{se } n \leq 80 \\ \dfrac{1-\operatorname{sen} n}{n^2} & \text{se } n > 80 \end{cases}$ é divergente.

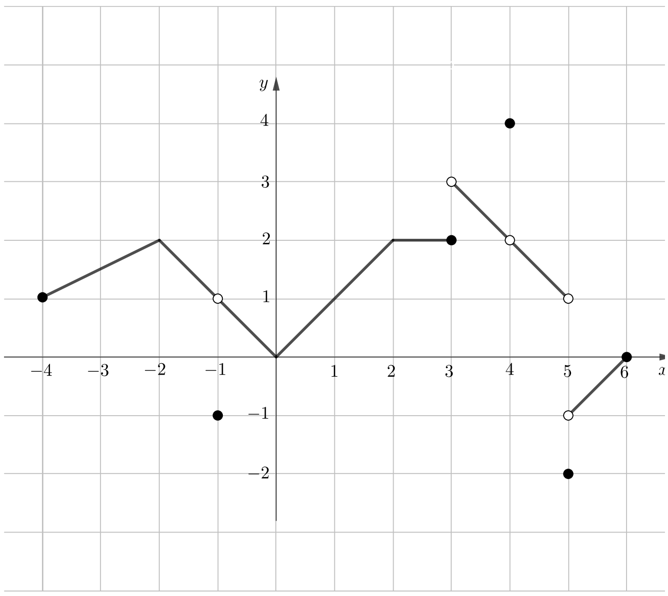
Exercício 5.

1. (1.5 valores) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n-1}}{5^n} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right)$.

2. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Estude a natureza da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\cos n}{(n+2)!}$. **II.** Verifique se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \dfrac{n}{n^4+2}$ é absolutamente convergente.

Exercício 6. (3 valores) Considere a função $f : [-4,6] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.



(a) Determine $f([0,5])$.

(b) Determine $f^{-1}([0,2[)$.

(c) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de f.

(d) Determine $\lim_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{5x^2+1}{x^2}\right)$.

(e) Determine, justificando, o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < 2\,.$$

Exercício 7. (3 valores) Considere a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in\mathbb{Z} \\ -x^2+1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \\ |x-1| & \text{se } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

Determine, justificando, o domínio de continuidade da função f.

Exercício 8. (3 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) Se $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ são tais que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$ e $g(x)=\begin{cases} x+3 & \text{se } x\leq -2 \\ 4+\operatorname{sen} x & \text{se } -2<x<0 \\ \frac{1}{x+4} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$, então $g\circ f$ é limitada.

(b) Existe uma função $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores positivos e negativos.

(c) A soma de duas funções $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ monótonas é uma função monótona.

FIM