Cálculo

Licenciatura em Ciências da Computação

1º Teste :: 22 de novembro de 2021

Duração :: 1h45m

Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional $3,44(5)$ sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação $|2x-1| \geq |x+1|$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left([2,\pi] \cap \mathbb{Q} \right).$$

(a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto A.

(b) Determine o derivado (A') do conjunto A.

Exercício 4.

1. (2 valores) Considere o conjunto $S =]1,2[\cup]5,+\infty[$. Em cada alínea apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja:

(a) não monótona e convergente para 7; (b) não majorada e admita uma subsucessão convergente para 2.

2. (1 valor) Diga, justificando, se a proposição seguinte é **verdadeira** ou **falsa**:

A sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \leq 60 \\ \dfrac{1-\operatorname{sen} n}{n} & \text{se } n > 60 \end{cases}$ é divergente.

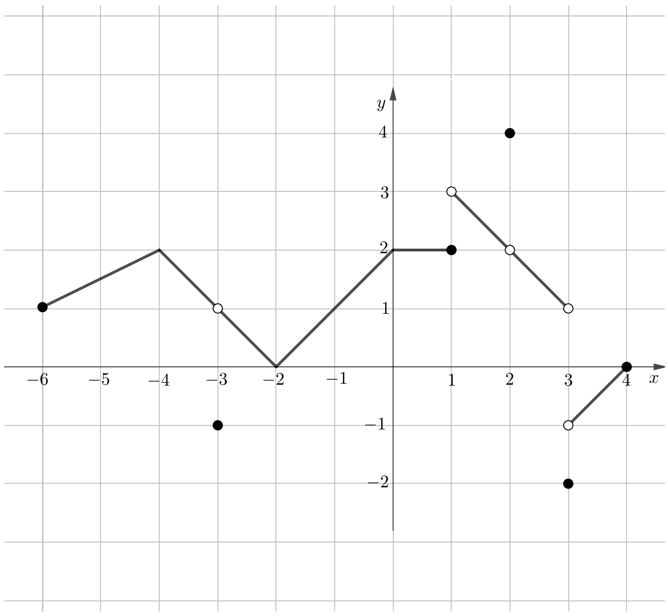
Exercício 5.

1. (1.5 valores) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{3^{n-1}}{4^n} \right)$.

2. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos n}{(n+1)!}$. **II.** Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{n^4+3}$ é absolutamente convergente.

Exercício 6. (3 valores) Considere a função $f : [-6,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.



(a) Determine $f([-2,3])$.

(b) Determine $f^{-1}([0,2[)$.

(c) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de f.

(d) Determine $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{3x^2-1}{x^2}\right)$.

(e) Determine, justificando, o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x+4| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < 2\,.$$

Exercício 7. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ -x^2+1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \\ |x-1| & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

Determine, justificando, o domínio de continuidade da função f.

Exercício 8. (3 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) Se $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são tais que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ e $g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -2 \\ 3+\cos x & \text{se } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{x+4} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, então $g \circ f$ é limitada.

(b) Existe uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores positivos e negativos.

(c) A soma de duas funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monótonas é uma função monótona.

FIM