Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional $4,1(2)$ sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação $|x-1| \leq |x+3|$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \left\{-4 + \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left([\sqrt{2}, 3] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})\right).$$

(a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto A.

(b) Determine o derivado (A') do conjunto A.

Exercício 4. (3 valores) Considere o conjunto $S =]1,2[\cup]3,+\infty[$. Em cada alínea apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja:

(a) não monótona e convergente para 6;

(b) estritamente crescente e convergente para 2;

(c) não majorada e admita uma subsucessão convergente.

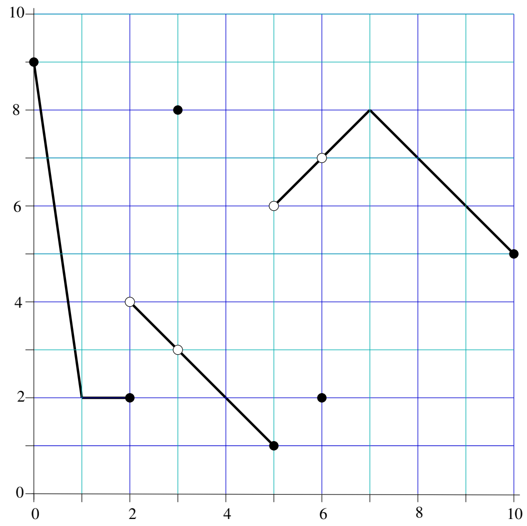
Exercício 5.

1. (1.5 valores) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^{n-1}}{4^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n}}\right)$.

2. (2 valores) Estude a natureza de **uma e uma só** das seguintes séries: I. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+\operatorname{sen} n}{n^2+1}$; II. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\cos n}{n!}$.

Exercício 6. (3 valores) Considere a função $f : [0,10] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.

(a) Determine $f([2,5])$.



(b) Determine $f^{-1}(]2,9[)$.

(c) Indique os pontos de máximo local de f, mencionando os respetivos máximos locais.

(d) Determine $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x^2+1}{x^2}\right)$.

(e) Determine, justificando, o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x-7| < \delta \Rightarrow |f(x)-8| < 2\,.$$

Exercício 7. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ -x^2+1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \\ |x+1| & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

Determine, justificando, o domínio de continuidade da função f.

Exercício 8. (3 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) A sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = \begin{cases} n^4 & \text{se } n \leq 30 \\ \dfrac{\cos n}{n^4} & \text{se } n > 30 \end{cases}$ é convergente.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n^7}$ é absolutamente convergente.

(c) Existe uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores positivos e negativos.

FIM