Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMat

1º Teste
30 · 10 · 2019

Cálculo
LCC
2019/2020

Duração: 1 hora e 30 minutos

Nome: **Número:**

Nas perguntas de verdadeiro/falso cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0.25 valores.

Questão 1 [4 valores] Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} < 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : |x - 4| \leq 1\} \text{ e } C = A \cup B.$$

a) Verifique que $C =]2, 3] \cup \{4, 5\}$.

b) Determine o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, e, se existirem, o ínfimo, o mínimo, o supremo e o máximo do conjunto C.

c) Indique:

i. um ponto a tal que $a \in C$ mas $a \notin C'$.

ii. um ponto b tal que $b \in C'$ mas $b \notin C$.

Questão 2 [4 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa:

	V	F
a) Toda a subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente.	○	○
b) Se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são divergentes, então $(u_n + v_n)_n$ tammbém é divergente.	○	○
c) Se $(u_n)_n$ é limitada, então $(u_n)_n$ é convergente.	○	○
d) Se $(u_n)_n$ é decrescente e de termos positivos, então $(u_n)_n$ é convergente.	○	○

Questão 3 [2 valores] Calcule, se existirem, os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{3n+1}$

b) $\lim\limits_{n} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3+2}\right)$

Questão 4 [4 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa:

	V	F
a) Se $\lim\limits_{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 1$, então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.	○	○
b) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n^3}}$ é convergente.	○	○
c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{2}$	○	○
d) Se $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.	○	○

Questão 5 [2 valores] Represente $x = 0.\overline{9}$ na forma de um quociente entre dois números inteiros, observando que

$$x = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots .$$

Questão 6 [2 valores] Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

é convergente mas não é absolutamente convergente.

Questão 7 [2 valores] Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões de termos não nulos, com $(v_n)_n$ convergente para $\ell \neq 0$, tais que

$$|u_n - v_n| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que a sucessão $(u_n)_n$ é convergente e que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ é divergente.

(FIM)