



Nome

Número

**As respostas aos grupos I a V são dadas na folha do enunciado.  
Nas perguntas de verdadeiro/falso cada resposta certa vale 0,75 valores  
e cada resposta errada desconta 0,25 valores.**

I

[2 valores] Considere o conjunto  $X = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1 \vee x = 2\}$ .

- a) Apresente, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo de  $X$ .
- b) Determine o interior, a aderência, o derivado e a fronteira de  $X$ .

II

[3 valores] Considere a sucessão de termo geral  $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ . Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

- |   | V                     | F                     |
|---|-----------------------|-----------------------|
| a) $\frac{40}{21}$ é termo da sucessão $(a_n)_n$ .    | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| b) $(a_n)_n$ é uma sucessão monótona crescente.       | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| c) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{2}$ . | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| d) $(a_n)_n$ é uma sucessão divergente.               | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

III

[3 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

- |  | V                     | F                     |
|--|-----------------------|-----------------------|
| a) Se uma sucessão é convergente, qualquer sua subsucessão é convergente.  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| b) Seja $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ uma série convergente. A série gerada por qualquer subsucessão de $(a_n)_n$ é uma série convergente. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| c) Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$ então $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n) = 2$ .  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| d) Se $f$ é uma função bijetiva e contínua então $f^{-1}$ é também contínua.   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

## IV

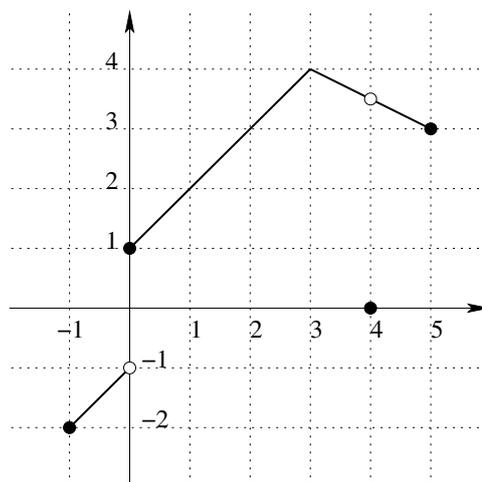
[4 valores] Em cada uma das alíneas seguintes apresente um exemplo ou justifique porque não existe um tal exemplo.

- a) Um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$ , finito e aberto.      b) Um conjunto  $X$  tal que  $X' = \{1\}$ .
- c) Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}$ .      d) Uma função  $f : [0, 1] \rightarrow ]0, 1]$  bijetiva.

## V

[4 valores] Considere a função  $f : [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico se apresenta na figura anexa.

- a) Indique o contradomínio de  $f$ .
- b) Indique os pontos de mínimo local de  $f$ , mencionando os respetivos mínimos locais.
- c) Indique os pontos onde  $f$  é descontínua.



- d) Escolha o maior valor positivo para  $\delta$  de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < 2.$$

## VI

[4 valores] Todas as respostas deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x \cos x}$ .

Questão 2. Estude a natureza da série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$ .