**PARTE I: Responda a apenas <u>três</u> das quatro seguintes perguntas:**

1. (3 valores) Seja $K$ um corpo e $x, y, z \in K$. Usando os axiomas de corpo, e justificando cuidadosamente, mostre que:

   (a) $x + z = y + z \implies x = y$. (b) $-(-x) = x$. (c) $x \cdot 0 = 0$.

2. (2 valores) Seja $K$ um corpo ordenado e $x, y \in K$. Usando a definição de valor absoluto de um elemento $x \in K$, mostre que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

3. (2 valores) Seja $K$ um corpo ordenado e $X \subset K$ um conjunto limitado superiormente.

   (a) Defina supremo de $X$.
   (b) Se $X = ]a, b[$, onde $a, b \in K$, mostre que $\sup X = b$.

4. (2 valores) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto

$$X = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \land x^2 < 25\}$$

**PARTE II: Responda a apenas <u>duas</u> das três seguintes perguntas:**

1. (3 valores) Dê um exemplo de:

   (a) uma sucessão alternada e limitada.
   (b) uma sucessão limitada, mas não monótona nem alternada.
   (c) uma sucessão $\{u_n\}$ tal que $\lim |u_n| = 3$, mas $\{u_n\}$ não é convergente para 3.
   (d) uma sucessão de Cauchy.
   (e) sucessões $\{u_n\}$, $\{w_n\}$ tais que $\lim u_n = +\infty$, $\lim w_n = -\infty$ e $\lim(u_n + w_n) = 4$.

2. (3 valores)

   (a) Defina sucessão monótona.
   (b) Defina sucessão limitada.
   (c) Considere $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 1$. Mostre que a sucessão de termo geral

$$u_n = 1 + a + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

   é monótona e limitada.

3. (3 valores)

   (a) Defina sucessão convergente.
   (b) Mostre, usando a definição, que se $\lim u_n = a$ e $\lim w_n = b$, então $\lim(u_n + w_n) = a + b$.

**PARTE III: Responda a apenas duas das três seguintes perguntas:**

1. (3,5 valores) Considere uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

   (a) Defina sucessão $\{s_n\}$ das somas parciais da série.

   (b) Usando a definição da alínea anterior, defina série convergente.

   (c) Mostre que se a série é convergente, então $\lim u_n = 0$.

2. (3,5 valores)

   (a) Dê, justificando, um exemplo de uma sucessão $\{u_n\}$ tal que:

      i. $\lim u_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

      ii. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^2$ é divergente.

   (b) Mostre que:

      i. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^{n-1}}{2^{2n}} = 1$

      ii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

3. (3,5 valores) Diga, justificando, se as séries seguintes são convergentes:

   $(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n}$; $(b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^n}{n!}$; $(c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3\sqrt[3]{n^5} + 4\sqrt{n}}{n^2}$;

   $(d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{7}{3n^5} + \dfrac{1}{4^n}\right)$; $(e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^8}\right)$; $(f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln \sqrt{n}}{n}$.