Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo EE

Licenciatura em Estatística Aplicada

Mestrado Integrado em Engenharia de Polímeros

1º Teste :: 17 de novembro de 2016

Nome ______________________ Número __________

As respostas aos exercícios 2 e 6 são dadas na folha do enunciado.
Todas as respostas deverão ser justificadas.

Exercício 1. [5 valores] Sejam $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : -2 \leq x \leq 1 \wedge |2x^2 - 1| < 3\right\}$ e $B = [0, 1[\setminus \mathbb{Q}$.

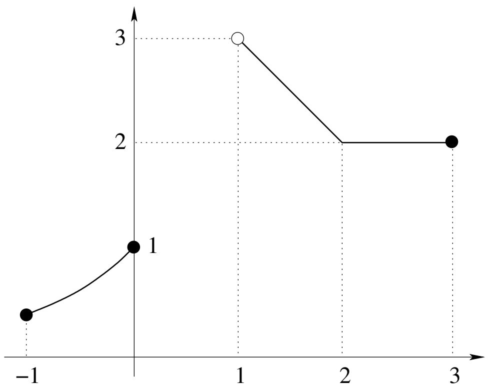
a) Mostre que $A =]-\sqrt{2}, 1] \cap \mathbb{Q}$.

b) Considere o conjunto $S = A \cup B$.

1. Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo e o ínfimo do conjunto S.
2. Diga, justificando, se S é aberto ou fechado.
3. Determine a fronteira, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de S.

Exercício 2. [5 valores] Considere a função $f : [-1, 0] \cup]1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na figura. No intervalo $[-1, 0]$ o gráfico da função f coincide com o gráfico da função exponencial.

a) Indique o contradomínio da função f.



b) A função f é injetiva?

c) Classifique a função f quanto à derivabilidade.

d) Determine $f'(0)$.

e) Indique, analiticamente, um prolongamento contínuo da função f ao intervalo $[-1, 3]$ que seja derivável no ponto zero.

Exercício 3. [3 valores] Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{e^x - 1 - x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Exercício 4. [3 valores] Considere a função bijetiva $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = \operatorname{ch}(\frac{1}{x})$.

a) Calcule a derivada de f.

b) Determine a função inversa de f.

c) Calcule $\big(f^{-1}\big)'(2)$.

Exercício 5. [2 valores]

a) Mostre que a equação $x^3 + e^x = 0$ tem solução no intervalo $[-1, 1]$.

b) Conclua que a solução é única.

Exercício 6. [2 valores] Em cada alínea, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe.

a) Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X' = \{1\}$.

b) Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua apenas em $[0, 1[$.

c) Uma função $f : [0, 1] \longrightarrow]0, 1[$ contínua e sobrejetiva.

d) Uma função $f : [0, 1] \longrightarrow]0, 1[$ bijetiva.