



Duração: 2 horas

Nome:

Número:

- Responda às questões 1, 3, 5, 6 e 7 justificando devidamente as suas respostas.
- Nas perguntas de verdadeiro/falso cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0.25 valores.

Questão 1 [2.5 valores] Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 5 \geq 0 \wedge |x - 4| > 2\}.$$

a) Mostre que $A =]-\infty, 1] \cup]6, +\infty[$.

b) Determine o conjunto dos pontos de acumulação e o conjunto dos pontos interiores de A .

c) A é um conjunto aberto? Porquê?

Questão 2 [4 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa:

V F

- a) Se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$, então a sucessão $(u_n)_n$ é convergente.
- b) Se $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada mas não monótona, então $(u_n)_n$ é divergente.
- c) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são convergentes, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$ é convergente.
- d) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente.

Questão 3 [1.5 valores] Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen } n}{n^2 + 1}$.

Questão 4 [4 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

V F

- a) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções descontínuas, então $f \circ g$ é uma função descontínua.
- b) Se $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, então f é contínua.
- c) Se $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, então f é primitivável.
- d) Seja $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_{-2}^2 f(x) dx = 4$.
Então $\int_{-1}^1 f(2x) dx = 2$.

Questão 5 [2 valores] Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0, \\ \pi e^{x^2+x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Verifique que a função f é contínua.

b) Mostre que f não é derivável no ponto 0.

Questão 6 [3 valores] Calcule cada um dos seguintes integrais indefinidos:

a) $\int \frac{x \ln(1 + 4x^2)}{1 + 4x^2} dx;$

b) $\int e^x \cos x \, dx.$

Questão 7 [3 valores] Considere a região do plano R limitada pelas curvas

$$y = |x| + 1 \text{ e } y = -x^2 + 3.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região R .

b) Calcule o valor da área da região R .

c) **Estabeleça** um integral, ou a soma de integrais, que lhe permita calcular o valor do perímetro da região R . (Não calcule o valor do perímetro)

(FIM)