Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

Licenciatura em Ciências da Computação

Exame :: 1 de fevereiro de 2019

Nome | Número

Nos Grupos I, II e III cada resposta certa vale $+0{,}5$ valores e cada resposta errada -0,25 valores.

I

[2 valores] Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : |x-1| \leq |x+\sqrt{2}|\}$. Indique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa.

	V	F
a) A é um conjunto limitado.	◯	◯
b) A é um conjunto aberto.	◯	◯
c) $\inf A$ é um número irracional.	◯	◯
d) $A \cap \mathbb{Q}$ é um intervalo.	◯	◯

II

[2 valores] Seja $(a_n)_n$ uma sucessão limitada estritamente crescente e seja $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Indique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa.

	V	F
a) $(a_n)_n$ é convergente.	◯	◯
b) $\bar{A} = A$.	◯	◯
c) A' é um conjunto singular.	◯	◯
d) A série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente.	◯	◯

III

[1,5 valores] Em cada uma das alíneas seguintes, identifique a afirmação verdadeira.

a) O valor de $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}\right)$ é igual a:

- ○ $\dfrac{7\pi}{4}$;
- ○ $-\dfrac{\pi}{4}$;
- ○ $\dfrac{\pi}{4}$;
- ○ nenhuma das anteriores.

b) O integral $\displaystyle\int \frac{8}{x^3-4x}\,dx$ é igual a:

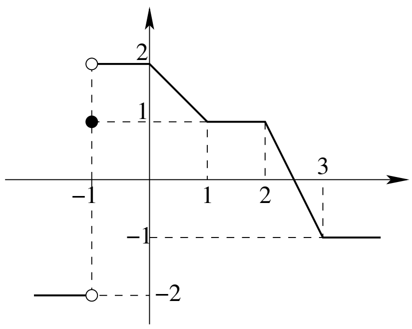
- ○ $\displaystyle\int \frac{8}{x^3}\,dx - \int \frac{2}{x^2}\,dx$;
- ○ $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$;
- ○ $\displaystyle\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx$;
- ○ nenhuma das anteriores.

c) Considere o integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{e^{2x}-e^x}\,dx$. A mudança de variável $x = \ln t$ permite escrever o integral como:

- ○ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2-t}\,dt$;
- ○ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^3-t^2}\,dt$;
- ○ $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t^2-t}\,dt$;
- ○ $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t^3-t^2}\,dt$.

IV

[2 valores] Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa. Indique:



a) $f(\mathbb{R})$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : f$ é contínua mas não é derivável em $x\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : x$ é ponto de mínimo local mas não é ponto de máximo local$\}$;

d) $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < 0 < b$ tais que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

V

[3 valores] Em cada uma das alíneas seguintes apresente um exemplo (ou justifique porque não existe) de uma função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que:

a) f seja contínua e sobrejetiva;

b) f seja injetiva e o seu contradomínio seja $[-1, 1] \setminus \{0\}$;

c) f seja limitada mas não integrável;

d) f não tenha zeros mas $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$.

VI

Questão 1. [2 valores] Determine os números naturais k de modo a que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{k^n n!}{n^n}$ seja convergente.

Questão 2. [2 valores] Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Questão 3. [3 valores] Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{4x \ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{e^x}\, dx$.

Questão 4. [2,5 valores] Considere a região do plano

$$R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-1)^2 \wedge y \leq 4x + 1 \wedge y \leq 19 - 5x\big\}.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região R.

b) Escreva uma expressão integral que permita calcular a área de R.
(Não calcule o valor da área)