

1. (1 valor) Seja K um corpo e $x, y \in K$. Usando os axiomas de corpo, mostre que

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y).$$

2. (1 valor) Seja K um corpo ordenado e $x, y \in K$. Sabendo que $|x + y| \leq |x| + |y|$, mostre que

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

3. (2 valores)

(a) Usando quantificadores, defina sucessão convergente.

(b) Usando a definição, mostre que a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ é convergente.

4. (2,5 valores) Diga se existe e, em caso afirmativo, dê um exemplo de uma sucessão:

(a) limitada que possua uma sub-sucessão não limitada.

(b) não limitada que possua uma sub-sucessão limitada.

(c) convergente mas não limitada.

(d) não monótona, limitada e não convergente.

(e) de Cauchy e estritamente crescente.

5. (1 valor) Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente, então $\lim u_n = 0$.

6. (2 valores) Diga, justificando, se as séries seguintes são convergentes:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 5^{n+1}}{4^{n+2}}; \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(\ln(n\pi))^n}$$

7. (1,5 valores) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A$ um ponto de acumulação.

(a) Defina derivada de f em a .

(b) Usando a definição, determine a derivada da função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x)$.

8. (2,5 valores) Diga se existe e, em caso afirmativo, dê um exemplo de uma função real de variável real f , definida num intervalo não degenerado, sendo:

(a) contínua mas não derivável.

(b) derivável mas não contínua.

(c) contínua e injectiva mas não monótona.

(d) $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua mas não limitada.

(e) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(-1) = f(1) = 0$ e $f(0) = 1$.

(v.s.f.f.)

9. (1 valor) Defina a função cotangente hiperbólica e represente-a graficamente.

10. (2 valores) Calcule as primitivas:

(a) $\int \frac{x}{4+x^2} dx$

(b) $\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$, usando $x = t^2$ com $t > 0$.

11. (2 valores) Resolva os seguintes integrais:

(a) $\int_{-1}^1 \sinh(x) dx$

(b) $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx$.

12. (1,5 valores) Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno de OX da região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$