Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Funções trigonométricas inversas

Considerando restrições adequadas das funções trigonométricas, obtemos funções contínuas e bijetivas definidas em intervalos. A injetividade será conseguida excluindo do domínio todos os pontos onde a função se repete. A sobrejetividade será obtida eliminado do conjunto de chegada todos os pontos que a função não assume. As inversas das restrições assim definidas serão também contínuas.

Arco-seno

Relativamente à função **seno**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sen}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x. \end{array} \tag{1}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-seno* – lê-se *arco (cujo) seno* – é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arcsen} y \end{array} \tag{2}$$

onde $\operatorname{arcsen} y$ indica o único arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a y. Assim

$$x = \operatorname{arcsen} y,\ \ y \in [-1,1] \iff y = \operatorname{sen} x,\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pelo facto da as funções (1) e (2) serem inversas uma da outra, tem-se

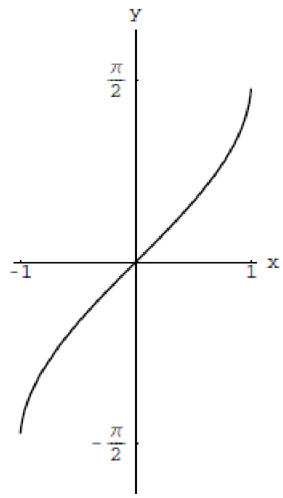
$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x,\ \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y) = y,\ \ \forall y \in [-1,1].$$

No entanto, apesar de fazer sentido calcular $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z)$, para $z \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z) \neq z,\ \ \forall z \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

uma vez que $\mathrm{CD}_{\operatorname{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Exemplos

1. $\operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $\quad \operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

   De facto, $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}$ e $-\dfrac{\pi}{3}$ são os únicos arcos do intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é, respetivamente, igual a 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Tem-se que, por exemplo, $\operatorname{sen}(3\pi) = 0$ e $\operatorname{sen}(8\pi) = 0$ mas $\operatorname{arcsen} 0 = 0$.

   Porque 0 é o único arco do intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ onde o seno é igual a 0.

Arco-cosseno

Relativamente à função **cosseno**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x. \end{array} \tag{3}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cosseno* − lê-se *arco (cujo) cosseno* − é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccos} y \end{array} \tag{4}$$

onde $\operatorname{arccos} y$ indica o único arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno é igual a y. Assim

$$x = \operatorname{arccos} y,\ y \in [-1,1] \iff y = \cos x,\ x \in [0,\pi].$$

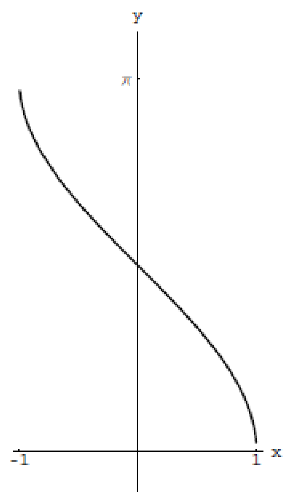
Pelo facto da as funções (3) e (4) serem inversas uma da outra, tem-se

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \forall x \in [0, \pi],$$

$$\cos(\arccos y) = y, \quad \forall y \in [-1, 1].$$

Por outro lado, uma vez que $\mathrm{CD}_{\arccos} = [0, \pi]$, tem-se

$$\arccos(\cos z) \neq z, \quad \forall z \notin [0, \pi].$$



Exemplos

1. $\arccos 1 = 0, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}.$

2. $\arccos(\cos 5\pi) = \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(\cos\dfrac{25\pi}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

Arco-tangente

Relativamente à função **tangente**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

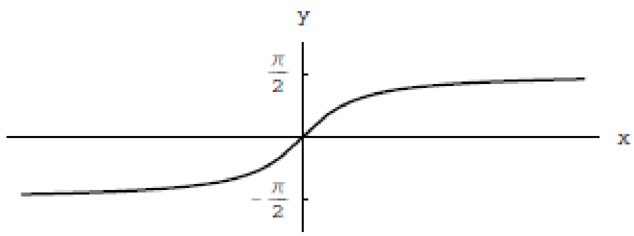
$$\begin{array}{rccl} \mathrm{tg}: & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{tg}\, x. \end{array} \tag{5}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-tangente* – lê-se *arco (cujo) tangente* – é a função

$$\begin{array}{rcl} \text{arctg}: \quad \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\[2ex] y & \longmapsto & \text{arctg}\, y \end{array} \tag{6}$$

onde $\text{arctg}\, y$ indica o único arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a y. Assim

$$x = \text{arctg}\, y,\ \ y \in \mathbb{R} \iff y = \text{tg}\, x,\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$



Arco-cotangente

Relativamente à função **cotangente**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

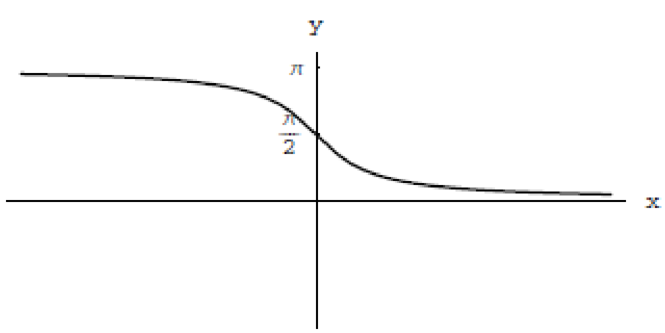
$$\begin{array}{rcl} \text{cotg}: \quad]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\[2ex] x & \longmapsto & \text{cotg}\, x. \end{array} \tag{7}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cotangente* − lê-se *arco (cujo) cotangente* − é a função

$$\begin{array}{rcl} \text{arcotg}: \quad \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, \pi[\\[2ex] y & \longmapsto & \text{arccotg}\, y \end{array} \tag{8}$$

onde $\text{arccotg}\, y$ indica o único arco do intervalo $]0, \pi[$ cuja cotangente é igual a y. Assim

$$x = \text{arccotg}\, y,\ \ y \in \mathbb{R} \iff y = \text{cotg}\, x,\ \ x \in]0, \pi[\,.$$



Arco-secante

Relativamente à função **secante**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \sec: & \left[0,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \sec x. \end{array} \tag{9}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-secante* − lê-se *arco (cuja) secante* − é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsec}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \operatorname{arcsec} y \end{array} \tag{10}$$

onde $\operatorname{arcsec} y$ indica o único arco do intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ cuja secante é igual a y. Assim

$$x = \operatorname{arcsec} y,\ \ y \in [1,+\infty[\iff y = \sec x,\ \ x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Arco-cossecante

Relativamente à função **cossecante**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{cosec}: & \left]0,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \operatorname{cosec} x. \end{array} \tag{11}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cossecante* − lê-se *arco (cuja) cossecante* − é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccosec}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccosec} y \end{array} \tag{12}$$

onde $\operatorname{arccosec} y$ indica o único arco do intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ cuja cossecante é igual a y. Assim

$$x = \operatorname{arccosec} y,\ \ y \in [1,+\infty[\iff y = \operatorname{cosec} x,\ \ x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right].$$