Sucessões

Maria Joana Torres

2021/22

Definição:

Uma função $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **sucessão real**.

À regra de correspondência $n \longmapsto u(n)$ chamamos **termo geral da sucessão** e ao elemento $u(n)$ chamamos **termo de ordem n**.

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Representamos a sucessão u de uma das seguintes formas:

- $\left(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\right)$
- $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\left(u_n\right)_n$ simplesmente, se daí não advier confusão.

Dada uma sucessão, o seu contradomínio designa-se por **conjunto dos termos da sucessão**.

Dizemos que uma sucessão é **definida por recorrência** se o termo de ordem n da sucessão for definido à custa de alguns dos $n-1$ termos anteriores.

Exemplo:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Definição: Uma sucessão $(u_n)_n$ diz-se:

- **constante** se $u_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para algum $a \in \mathbb{R}$;
- **limitada inferiormente ou minorada** se
$$\exists a \in \mathbb{R} : \, u_n \geq a, \, \forall n \in \mathbb{N};$$
- **limitada superiormente ou majorada** se
$$\exists b \in \mathbb{R} : \, u_n \leq b, \, \forall n \in \mathbb{N};$$
- **limitada** se é, simultaneamente minorada e majorada, ou seja se
$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \, a \leq u_n \leq b, \, \forall n \in \mathbb{N};$$
ou equivalentemente, se
$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \, |u_n| \leq M, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição: Uma sucessão $(u_n)_n$ diz-se:

- **crescente** se
$$u_n \leq u_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N};$$
em particular, **estritamente crescente** se
$$u_n < u_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N};$$

- **decrescente** se
$$u_{n+1} \leq u_n, \ \forall n \in \mathbb{N};$$
em particular, **estritamente decrescente** se
$$u_{n+1} < u_n, \ \forall n \in \mathbb{N};$$

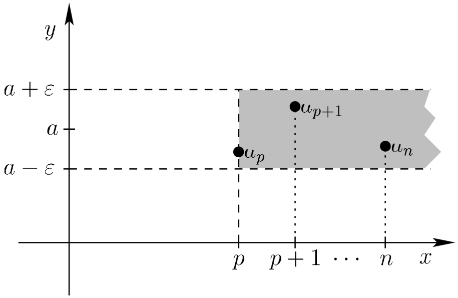
- **monótona** se é crescente ou decrescente.

Definição:

Dado $a \in \mathbb{R}$, diz-se que uma **sucessão** $(u_n)_n$ é **convergente para** $\boldsymbol{a}$, que **tende para** $\boldsymbol{a}$ ou que **tem limite** $\boldsymbol{a}$, se

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n \geq p \qquad |u_n - a| < \epsilon.$$

Escreve-se $(u_n)_n \underset{n}{\longrightarrow} a$, $\quad u_n \underset{n}{\longrightarrow} a \quad$ ou $\quad \lim_n u_n = a$.



Definição:

Uma sucessão $(u_n)_n$ diz-se **convergente** se existir um número real a tal que

$$\lim_n u_n = a.$$

Uma sucessão que não é convergente diz-se **divergente**.

Teorema [**Unicidade do limite**]:

Uma sucessão não pode convergir para dois limites diferentes.

Teorema :

Toda a sucessão convergente é limitada.

A recíproca do Teorema anterior é falsa, isto é, nem toda a sucessão limitada é convergente.
Por exemplo, a sucessão $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, é limitada mas não é convergente.

Do teorema anterior sai uma consequência muito importante: se uma sucessão não é limitada então ela é divergente.

Exemplo: A sucessão definida por $u_n = 2n$; $n \in \mathbb{N}$, é divergente, porque não é limitada.

<u>Teorema</u>:

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão monótona e limitada. Então $(u_n)_n$ é convergente e:

1. se $(u_n)_n$ é crescente, $\lim\limits_{n} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$;

2. se $(u_n)_n$ é decrescente, $\lim\limits_{n} u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema:

Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões convergentes respetivamente para a e para b. Então:

1. $\left(u_n + v_n\right)_n$ é uma sucessão convergente para $a + b$;
2. $\left(u_n v_n\right)_n$ é uma sucessão convergente para ab;
3. se $v_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, então $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ é uma sucessão convergente para $\frac{a}{b}$.

Teorema:

Sejam $(u_n)_n$ uma sucessão convergente para zero e $(v_n)_n$ uma sucessão limitada. Então $(u_n v_n)_n$ é uma sucessão convergente para zero.

Teorema **[das sucessões enquadradas]**:

Sejam $(u_n)_n$ e $(w_n)_n$ duas sucessões convergentes tais que

$$\lim_n u_n = \lim_n w_n = a.$$

Seja $(v_n)_n$ outra sucessão tal que, a partir de uma certa ordem, se tem

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Então $(v_n)_n$ também é convergente e $\lim_n v_n = a$.

Definição:

Dada uma sucessão $(u_n)_n$ de números reais, uma sua **subsucessão** é uma restrição da correspondente aplicação $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, digamos

$$N^* = \{n_1, n_2, \dots, n_p, \dots\}, \quad \text{com} \quad n_1 < n_2 < \cdots < n_p \cdots$$

Tal subsucessão representa-se por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou por $(u_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$.

Teorema:

Se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente para a, qualquer sua subsucessão é convergente para a.

Corolário:

1. Se $(u_n)_n$ possui uma subsucessão divergente então $(u_n)_n$ é também divergente.
2. Se $(u_n)_n$ possui duas subsucessões convergentes para limites diferentes então $(u_n)_n$ é divergente.
3. Se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente possuindo uma subsucessão de limite a então $\lim\limits_n u_n = a$.
4. Se $\lim\limits_n u_n = a$ então, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_n u_{n+k} = a$.

Definição:

Diz-se que uma **sucessão** $(u_n)_n$ **tende para** $+\infty$ (resp. $-\infty$) se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad u_n > M \qquad (\text{resp. } u_n < M).$$

Escreve-se $\lim\limits_{n} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$

(resp. $\lim\limits_{n} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n}{\longrightarrow} -\infty$).

Teorema:

1. Toda a sucessão crescente e não limitada tende para $+\infty$;
2. Toda a sucessão decrescente e não limitada tende para $-\infty$.

Teorema:

Se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que $u_n \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_n u_n = 0$ se e só se $\lim\limits_n \dfrac{1}{|u_n|} = +\infty$.

Nota:

A proposição anterior diz-nos que o inverso de um infinitésimo (sucessão convergente para zero) é, em módulo, um infinitamente grande e que o inverso de um infinitamente grande em módulo é um infinitésimo.

No cálculo de limites de sucessões, algumas indeterminações comuns são:

$$\frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$