Séries

Maria Joana Torres

2021/22

Considere-se uma sucessão $(u_n)_n$ de números reais. À expressão

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

que representa uma soma com um número infinito de parcelas, chamamos série numérica de termo geral u_n ou série numérica gerada por u_n. Usamos as notações:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \quad \sum_{n\geq 1} u_n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n, \quad \sum_{n} u_n$$

A sucessão $(u_n)_n$ diz-se a sucessão geradora da série.

Dada a série gerada por $(u_n)_n$, construa-se uma nova sucessão $(s_n)_n$ pondo

$$\begin{aligned}
s_1 &= u_1 \\
s_2 &= u_1 + u_2 \\
s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
&\cdots \\
s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\
&\cdots
\end{aligned}$$

a que chamamos sucessão das somas parciais da série.

Definição:

Dizemos que a série $\sum_{n \geq 1} u_n$ é convergente quando a correspondente sucessão das somas parciais é convergente, ou seja, quando

$$\exists\, s \in \mathbb{R} : \;\; s = \lim_n s_n .$$

Escrevemos

$$s = \sum_{n \geq 1} u_n$$

e dizemos que s é a soma da série $\sum_{n \geq 1} u_n$. Por outro lado, se a série $\sum_{n \geq 1} u_n$ não é convergente, dizemos que ela é divergente.

Nota:

Por abuso de notação, escreveremos $\sum_{n\geq 1} u_n$ para designar a série gerada por $(u_n)_n$, quer se trate de uma série convergente ou de uma série divergente.

Nota:

Frequentemente, por conveniência, consideramos séries em que a sucessão geradora tem domínio $\mathbb{N}_0$ ou domínio $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, sendo $n_0 \in \mathbb{N}$.

Escrevemos então $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} u_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

Consequência 1:

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ duas séries convergentes de somas s e t, respetivamente. Então:

- a série $\sum_{n\geq 1} (u_n + v_n)$ converge e tem soma $s + t$;
- a série $\sum_{n\geq 1} \alpha\, u_n$ converge e tem soma αs, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Consequência 2:

Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente então, dado $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, a série $\sum_{n\geq 1} \alpha\, u_n$ também é divergente.

Consequência 3:

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ convergente e $\sum_{n\geq 1} v_n$ divergente. Então $\sum_{n\geq 1} (u_n + v_n)$ é divergente.

Definição:

Duas séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ dizem-se da mesma natureza se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.

Teorema:

Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões que diferem, quando muito, num número finito de termos. Então as séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ geradas por $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são da mesma natureza.

Definição:

Chama-se série geométrica de razão r, com $r \in \mathbb{R}$, a uma série do tipo

$$\sum_{n \geq 1} r^{n-1}$$

- sucessão geradora $(u_n)_n$ com $u_n = r^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$
- sucessão das somas parciais $(s_n)_n$ com $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$

Tem-se

$$s_n = \begin{cases} n & \text{se} \quad r = 1 \\ \frac{1-r^n}{1-r} & \text{se} \quad r \neq 1 \end{cases}$$

Teorema:

A série geométrica de razão r, $\sum_{n \geq 1} r^{n-1}$, converge se e só se $|r| < 1$.

Quando convergente a sua soma é $s = \frac{1}{1-r}$.

Definição:

A série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é chamada série harmónica.

Proposição:

A série harmónica $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é uma série divergente.

Definição:

Chama-se série de Riemann (de expoente $\alpha \in \mathbb{R}^+$), a uma série do tipo $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposição:

As séries de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ são divergentes se $0 < \alpha \leq 1$ e são convergentes se $\alpha > 1$.

Teorema **[Condição necessária de convergência]**:

Se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente então $\lim_n u_n = 0$.

Em geral, pretendemos estudar a natureza da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, pelo que o teorema é útil quando o passamos à forma equivalente:

__Teorema__ **[condição suficiente de divergência (ou teste de divergência)]**:

Se a sucessão $(u_n)_n$ não tem limite ou se $\lim_n u_n = \ell$, com $\ell \neq 0$, então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é divergente.

__Nota__:

O recíproco do teorema é obviamente falso. Isto é,

$$\lim_n u_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Basta pensar no exemplo da série harmónica.

Definição:

A uma série do tipo $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1} a_n$, em que $(a_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos, chamamos **série alternada**.

Teorema [**Critério de Leibniz**]:

Seja $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ uma série alternada tal que:

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente;
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero.

Então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ é convergente.

Consideremos uma série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ cujos termos têm sinal arbitrário. Formemos a correspondente série dos módulos, $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$, que é obviamente uma série de termos não negativos.

Teorema:

Se a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ é convergente então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ também é convergente. Além disso,

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \, .$$

Observações: do teorema anterior conclui-se que:

1. Nunca se tem $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ convergente e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente!

2. Podemos ter

   (a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergentes, e dizemos que a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é absolutamente convergente.

   (b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ divergente e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente, e dizemos que a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é simplesmente convergente.

   (c) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergentes.

Teorema **[Primeiro Critério de Comparação]**:

Sejam $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ séries de termos não negativos tais que

$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \implies u_n \leq v_n .$$

- Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge então $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ também converge.
- Equivalentemente, se $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge então $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ também diverge.

Teorema [**Segundo Critério de Comparação**]:

Sejam $(u_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos e $(v_n)_n$ uma sucessão de termos positivos tais que existe

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \ell.$$

- Se $\ell \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ são séries da mesma natureza.
- Se $\ell = 0$, a convergência de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ implica a convergência de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- Se $\ell = +\infty$, a convergência de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ implica a convergência de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$.

Teorema [**Critério de Cauchy**]:

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos tal que

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

- Se $\ell < 1$, então $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente.
- Se $\ell > 1$, então $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é divergente.
- Se $\ell = 1$ nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

<u>Teorema</u> **[Critério de d'Alembert]**:

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos positivos tal que

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

- Se $\ell < 1$, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente.
- Se $\ell > 1$, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é divergente.
- Se $\ell = 1$ nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Chama-se série de Mengoli a uma série do tipo

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+p}), \quad p \geq 1\,,$$

onde (a_n) é uma sucessão qualquer.

Exemplo: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$.

Tem-se que

$$\begin{aligned} s_n = &\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\dots \\ &+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right), \end{aligned}$$

ou seja

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\,,$$

donde $\lim_n s_n = 3/2$ e conclui-se que a série de Mengoli dada é convergente e tem soma $s = 3/2$.

Para a série com a expressão geral

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+p}), \quad p \geq 1\,, \qquad (*)$$

onde (a_n) é uma sucessão qualquer, vem

$$\begin{aligned} s_n = & \,(a_1 - a_{p+1}) + (a_2 - a_{p+2}) + (a_3 - a_{p+3}) + \ldots \\ & + (a_p - a_{2p}) + (a_{p+1} - a_{2p+1}) + (a_{p+2} - a_{2p+2}) + \ldots \\ & + (a_{n-2} - a_{n+p-2}) + (a_{n-1} - a_{n+p-1}) + (a_n - a_{n+p})\ , \end{aligned}$$

ou seja

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_p - (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p})\,,$$

pelo que existe $\lim_n s_n$ se e só se existe $\lim_n (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p})$, ou seja, se e só se existe $\lim_n a_n$.

Conclusão: A série de Mengoli definida pela expressão $(*)$ é convergente se e só se a correspondente sucessão $(a_n)_n$ é convergente. Em caso de convergência, a soma da série é

$$\boxed{s = a_1 + a_2 + \ldots + a_p - p \lim_n a_n}\,.$$