A - Série geométrica

• Seja $a \in \mathbb{R}$. À série numérica $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^{n-1} = 1+a+a^2+a^3+\cdots$ chama-se série geométrica de razão a. A sua sucessão das somas parciais é definida por

$$s_n = \begin{cases} n & \text{se } a = 1, \\ \dfrac{1-a^n}{1-a} & \text{se } a \neq 1. \end{cases}$$

Esta série diverge se $|a| \geq 1$ e converge se $|a| < 1$, caso em que a sua soma é $s = \dfrac{1}{1-a}$.

B - Série de Riemann

• Seja $p\in\mathbb{R}^+$. À série numérica $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^p}$ chama-se série de Riemann. Esta série diverge se $p \leq 1$ e converge se $p > 1$. No caso particular em que $p = 1$, a série de Riemann recebe a designação de série harmónica.

C - Série de Mengoli (ou telescópica)

• Sejam $\{u_n\}$ uma sucessão de números reais e $p\in\mathbb{N}$. À série numérica $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n - u_{n+p})$ chama-se série de Mengoli ou telescópica. A sua sucessão das somas parciais é

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots u_{n+p}), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Esta série converge se e só se $\{u_n\}$ é uma sucessão convergente. Em caso de convergência, a sua soma é $s = u_1 + u_2 + \cdots + u_p - p \lim u_n$.

A - Primeiro Critério de Comparação

Sejam $\{u_n\}$ e $\{w_n\}$ sucessões de termos não negativos, tais que para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$, se tem

$$u_n \leq w_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ também converge.

Equivalentemente, se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ também é diverge.

B - Segundo Critério de Comparação

Sejam $\{u_n\}$ uma sucessão de termos não negativos e $\{w_n\}$ uma sucessão de termos positivos, tais que existe $L = \lim \dfrac{u_n}{w_n}$, sendo $L \in \mathbb{R}_0^+$ ou $L = +\infty$.

- Se $L \in \mathbb{R}^+$ então as séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ possuem a mesma natureza.
- Se $L = 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge então $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ também converge.

  Equivalentemente, se $L = 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge então $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ também diverge.
- Se $L = +\infty$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ diverge então $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ também diverge.

  Equivalentemente, se $L = +\infty$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge então $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ também converge.

C - Critério da razão

Seja $\{u_n\}$ uma sucessão de termos positivos tal que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$.

- Se $L < 1$ então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- Se $L > 1$ então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

D - Critério da raíz

Seja $\{u_n\}$ uma sucessão de termos não negativos tal que $\lim \sqrt[n]{u_n} = L$.

- Se $L < 1$ então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- Se $L > 1$ então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.