Universidade do Minho
Cálculo (2017/2018)

LCC
Resumo: Corpo

A - Corpo

Um corpo é um conjunto K munido de duas operações chamadas adição e multiplicação que satisfazem os axiomas abaixo:

Axiomas da adição. Para todo $x, y, z \in K$:

A1. Associatividade: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
A2. Comutatividade: $x + y = y + x$.
A3. Existência de elemento neutro: $\exists 0 \in K \,:\; x + 0 = x$
A4. Existência de simétrico: $\forall x \in K\,,\ \exists (-x) \in K \,:\; x + (-x) = 0$

Axiomas da multiplicação. Para todo $x, y, z \in K$:

M1. Associatividade: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
M2. Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot x$
M3. Existência de elemento neutro: $\exists 1 \in K \,:\; 1 \neq 0\,,\ x \cdot 1 = x$
M4. Existência de inverso: $\forall x \in K\,,\ x \neq 0\,,\ \exists\, x^{-1} \in K \,:\; x \cdot x^{-1} = 1$

Axioma da distributividade.

D1. Distributividade: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,,\ \forall x, y, z \in K$

B - Corpo Ordenado

Um corpo ordenado é um corpo K no qual se destaca um subconjunto $P \subset K$ tal que:
P1: Se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$.
P2: Dado $x, y \in K$, uma das três alternativas ocorre: $x = 0$ ou $x \in P$ ou $(-x) \in P$.

Propriedades da relação de ordem $x < y$. Para todo $x, y, z \in K$:

O1. Transitividade: Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
O2. Tricotomia: Dados $x, y \in K$, verifica-se $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.
O3. Monotonia da adição: Se $x < y$, então $x + z < y + z$.
O4. Monotonia da multiplicação: Se $x < y$ e $0 < z$, então $x \cdot z < y \cdot z$. Se $x < y$ e $z < 0$, então $y \cdot z < x \cdot z$.

C - Corpo Ordenado Completo

Um corpo ordenado K diz-se completo quando todo o subconjunto não-vazio, limitado superiormente, possui um supremo em K.

Axioma: Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado corpo dos números reais.