Primitivas

Maria Joana Torres

2021/22

O problema desta secção é o de, dada uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo I, determinar uma nova função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

Definição:

Seja X uma união finita de intervalos de $\mathbb{R}$. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, diz-se que uma função $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **primitiva** ou uma **antiderivada** de f se F for derivável e $F' = f$. Diz-se que a função f é **primitivável** se f admitir uma primitiva.

Da definição é imediato que

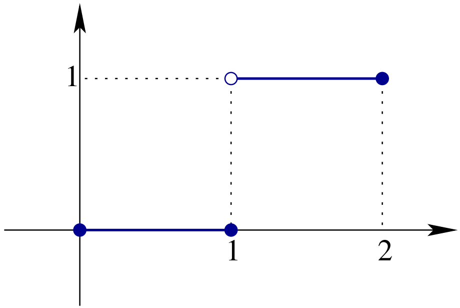
$$F \text{ é uma primitiva de } f \quad \text{sse} \quad f \text{ é a derivada de } F$$

Fica assim claro que a primitivação é o processo inverso da derivação.

Exemplo 1: A função $F(x) = \text{sen}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2: A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + x^2$ é primitivável, visto que $F(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de f.

Exemplo 3: A função $g : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 0$ se $x \in [0, 1]$, $g(x) = 1$ se $x \in]1, 2]$ não é primitivável.



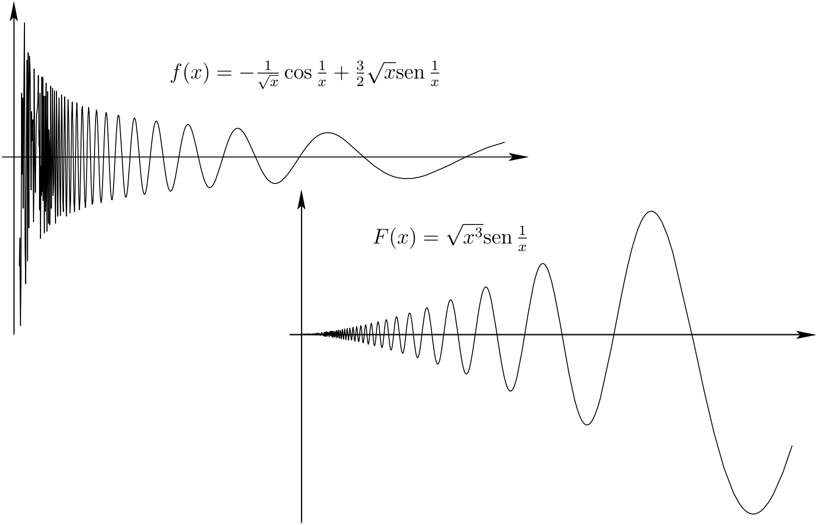
Nota: recordar o Teorema de Darboux.

Exemplo 4: A função g do exemplo anterior é descontínua e não admite primitiva. Vejamos agora o exemplo de uma função descontínua que admite primitiva. A função

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} \,\text{sen}\, \frac{1}{x} & \text{se } x \in \,]0,1] \end{cases} \end{array}$$

admite primitiva $\begin{array}{rccl} F: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \sqrt{x^3} \,\text{sen}\, \frac{1}{x} & \text{se } x \in \,]0,1]. \end{cases} \end{array}$

Exemplos



Nota: veremos mais tarde que qualquer função contínua é primitivável.

Se F é uma primitiva de f no intervalo I e C é uma constante real arbitrária, então

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x), \ x \in I.$$

Então:

Consequência 1: Se F é uma primitiva de f no intervalo I, então toda a função

$$F(x) + C, \ x \in I,$$

com C uma constante real arbitrária, é também uma primitiva de f.

Notemos agora que, se F_1 e F_2 forem duas primitivas de uma função f num intervalo I, então

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x),\ x \in I,$$

resultando

$$[F_1(x) - F_2(x)]' = 0,\ x \in I$$

e, como I é um intervalo, conclui-se que

$$F_1(x) - F_2(x) = C,\ x \in I,$$

ou seja que

$$F_1(x) = F_2(x) + C,\ x \in I.$$

Consequência 2: Se F_1 e F_2 são duas primitivas de f em I, então

$$F_2(x) = F_1(x) + C,\ x \in I.$$

Definição:

Seja f uma função definida num intervalo, primitivável, e F uma sua primitiva. Ao conjunto de todas as primitivas de f chamamos **integral indefinido** de f e denotamo-lo por $\displaystyle\int f(x)\,dx$, escrevendo, normalmente,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções primitiváveis, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $f + g$ e λf são primitiváveis e:

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx;$
- $\displaystyle\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx.$

Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis e suponhamos que $g(J) \subseteq I$. Então f' e $(f' \circ g) \cdot g'$ são primitiváveis e:

- $\displaystyle\int f'(x)\, dx = f(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R};$
- $\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

- $\int 1\,dx = x + C$
- $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
- $\int f^\alpha(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

- $\int \text{sen}\, x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \text{sen}\, x + C$
- $\int \text{tg}\, x \, dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \text{cotg}\, x \, dx = \ln|\text{sen}\, x| + C$
- $\int \text{sh} x \, dx = \text{ch} x + C$
- $\int \text{ch} x \, dx = \text{sh} x + C$
- $\int \text{th} x \, dx = \ln(\text{ch} x) + C$
- $\int \text{coth} x \, dx = \ln|\text{sh} x| + C$

Teorema:

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1. Então é válida a seguinte

fórmula de primitivação por partes

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Teorema:

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite primitiva F. Sejam J um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\varphi : J \longrightarrow I$ uma função bijetiva, derivável, cuja derivada não se anula. Então $\Phi = F \circ \varphi$, é uma primitiva de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ e é válida a seguinte

fórmula de primitivação por substituição ou mudança de variável

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Conclusão: O teorema anterior estabelece que, nas condições indicadas, $\int f(x)\,dx$ pode ser calculado da seguinte forma:

1. faz-se a substituição $x = \varphi(t)$;
2. calcula-se depois a nova primitiva $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$;
3. desfaz-se a substituição, regressando à variável inicial x, através de $t = \varphi^{-1}(x)$.

Nota:

A função que nos dá a mudança de variável, φ, deve ser uma função regular (deve admitir, pelo menos, primeira derivada). Se a sua derivada for não nula num ponto, e se a derivada for contínua, podemos garantir que há um intervalo que contém o ponto onde a derivada não se anula. Admitimos assim que tudo é feito num certo intervalo onde as condições do teorema são verificadas.

Ver ficheiro “PrimitivacaoFuncoesRacionais.pdf”