Números Reais

Maria Joana Torres

2021/22

O conjunto dos números reais será indicado por $\mathbb{R}$

A identificação entre os números reais e os pontos de uma reta, designada por reta real, permite obter uma representação geométrica dos números reais, muito útil na compreensão e visualização de diversos conceitos envolvendo números reais.

A associação que a cada numero real faz corresponder um e um só ponto da reta, permite também usar uma linguagem geométrica, em que *ponto* passará a significar *número real*,

dizer que

$x < y$ será dizer que x está à esquerda de y

e, dados

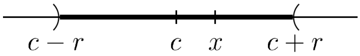
$x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ representará a distância do ponto x ao ponto y.

Reta real

Nesta representação, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, o intervalo $[x, y]$ será representado pelo segmento de reta cujos extremos são os pontos x e y.

- Na figura os pontos a e b representam números reais (identificados também por a e b) tais que $a < b < 0$, uma vez que a está à esquerda de b, estando este, por sua vez, à esquerda de zero.
- O segmento de reta de extremos a e b, marcado com traço mais carregado, representa o intervalo $[a, b]$.

Reta real



Na figura está representado um ponto c e o intervalo aberto centrado em c e de raio (semi-amplitude) $r > 0$, ou seja, o intervalo

$$]c-r,\, c+r[\,.$$

Este intervalo é o lugar geométrico dos

pontos da reta cuja distância a c é menor do que r

ou, dito de forma equivalente, o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x-c| < r\}\,.$$

Recordemos que, dado $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ representa o **valor absoluto** ou **módulo** de x, definido da seguinte forma:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

O valor absoluto verifica as seguintes propriedades.

Propriedades Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então:

1. $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ sse $x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$
4. $-|x| \leq x \leq |x|$
5. sendo $a \geq 0$, tem-se que $|x| \leq a$ sse $-a \leq x \leq a$
6. sendo $a \geq 0$, tem-se que $|x| \geq a$ sse $x \geq a \quad \vee \quad x \leq -a$
7. $|x.y| = |x|.|y|$
8. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, sempre que $y \neq 0$
9. $|x + y| \leq |x| + |y|$
10. $|x| - |y| \leq \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$
11. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

- o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

- o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

- o conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$$

- aos números reais que não são racionais chamamos números irracionais e denotamos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Propriedade: Todo o intervalo não degenerado de números reais possui uma infinidade de racionais e uma infinidade de irracionais.

Definição: Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é

- **majorante de** X se $\quad \forall x \in X \qquad x \leq a$;
- **minorante de** X se $\quad \forall x \in X \qquad a \leq x$;
- **máximo de** X se a é majorante de X e $a \in X$. Representa-se $a = \max X$;
- **mínimo de** X se a é minorante de X e $a \in X$. Representa-se $a = \min X$.

Nota:

Observemos que, se a é majorante de X, qualquer elemento maior do que a é também majorante de X. Analogamente, se a é minorante de X, qualquer elemento menor do que a é minorante de X.

Definição:

- Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **majorado** ou **limitado superiormente** se possui algum majorante.
- Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **minorado** ou **limitado inferiormente** se possui algum minorante.
- Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **limitado** quando X é, simultaneamente, majorado e minorado, isto é, quando

$$\exists c, d \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad c \leq x \leq d,$$

ou, equivalentemente, quando

$$\exists c, d \in \mathbb{R}, \quad X \subseteq [c, d].$$

Definição:

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **supremo de** X e representa-se $a = \sup X$, se verifica as duas condições seguintes:

- $\forall x \in X \quad x \leq a \quad$ (a é majorante de X);
- se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in X,\ x \leq b$, então $a \leq b \quad$ (a é o menor dos majorantes).

Definição:

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **ínfimo de** X e representa-se $a = \inf X$, se verifica as duas condições seguintes:

- $\forall x \in X \quad a \leq x \quad$ (a é minorante de X);
- se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in X,\ b \leq x$, então $b \leq a \quad$ (a é o maior dos minorantes).

Nota:

- O supremo e o ínfimo de um conjunto, quando existem, são únicos.
- Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ majorado tem máximo se e só se $\sup X \in X$. Em particular, se $a = \sup X$ e $a \in X$, então $a = \max X$.
- Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ minorado tem mínimo se e só se $\inf X \in X$. Em particular, se $a = \inf X$ e $a \in X$, então $a = \min X$.

Definição:

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ diz-se **ponto de acumulação de** X se

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \big(\,]x-\epsilon, x+\epsilon[\,\setminus\{x\}\big) \cap\ X \neq \emptyset.$$

Em particular, dizemos que x é **ponto de acumulação à direita de** X quando

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad]x, x+\epsilon[\, \cap X \neq \emptyset$$

e que x é **ponto de acumulação à esquerda de** X quando

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad]x-\epsilon, x[\, \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de X designa-se por **derivado** de X e representa-se por X'.
O conjunto dos pontos de acumulação à direita representa-se por X'_+ e o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda por X'_-.

Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é **ponto isolado de** X se pertencer a X mas não for ponto de acumulação de X, isto é,

$$\exists\, \epsilon > 0 \qquad]x-\epsilon, x+\epsilon[\, \cap X = \{x\}.$$