# Limites e Continuidade

Maria Joana Torres

2021/22

Definição:

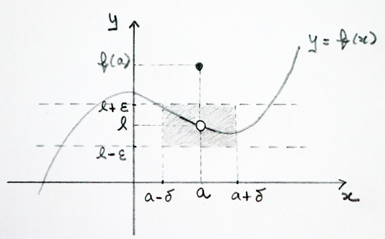
Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$ um ponto de acumulação de $X$.

Diz-se que o número real $\ell$ é o **limite de $f(x)$ quando $x$ tende para $a$**, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - \ell| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Simbolicamente:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X \qquad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$



**Teorema** [**Unicidade do limite**]:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_2$ então $\ell_1 = \ell_2$.

**Teorema**:

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $g$ é limitada em $X \backslash \{a\}$ então

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$

**Teorema** [**Teorema do enquadramento**]:

Sejam $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$ tais que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X \backslash \{a\}.$$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ então também $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

**Teorema** **[Aritmética de limites]**:

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Suponhamos que existem $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $m = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Então

(a) $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \ell + m;$

(b) $\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x) = \ell - m;$

(c) $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = \ell m;$

(d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{m},$ sempre que $m \neq 0$.

Definição:

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_+$ um ponto de acumulação à direita do conjunto $X$.

Diz-se que o número real $\ell$ é o **limite à direita de $f(x)$ quando $x$ tende para $a$** (por valores superiores a $a$), e escreve-se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell,$$

quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - \ell| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$.

Simbolicamente:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \qquad x \in ]a, a+\delta[ \cap X \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Definição:

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_-$ um ponto de acumulação à esquerda do conjunto $X$.

Diz-se que o número real $\ell$ é o **limite à esquerda de $f(x)$ quando $x$ tende para $a$** (por valores inferiores a $a$), e escreve-se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell,$$

quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - \ell| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $-\delta < x - a < 0$.

Simbolicamente:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \qquad x \in \,]a - \delta, a[\, \cap X \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

**Teorema**:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Então existe $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ se e só se existem e são iguais a $\ell$ os limites laterais, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell.$$

Definição:

Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não majorado. Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, diz-se que o **limite de f quando $x$ tende para $+\infty$** é $\boldsymbol{\ell}$ e escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell,$$

quando o número real $\ell$ satisfaz à seguinte condição:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{R} \; \forall x \in X \qquad x > N \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Ou seja, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ sempre que $x > N$.

Definição:

Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não minorado. Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, diz-se que o **limite de f quando $x$ tende para $-\infty$** é $\boldsymbol{\ell}$ e escreve-se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell,$$

quando o número real $\ell$ satisfaz à seguinte condição:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{R} \; \forall x \in X \qquad x < N \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

**Definição**:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Diz-se que:

- o **limite de f quando $x$ tende para $a$** é $+\infty$ se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{a\} \qquad |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

  e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$;

- o **limite de f quando $x$ tende para $a$** é $-\infty$ se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{a\} \qquad |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) < M$$

  e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Definição:

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $X$ é um conjunto não majorado, diz-se que o **limite de f quando $x$ tende para $+\infty$** é $+\infty$ e escreve-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\; \exists\, N \in \mathbb{R}\; \forall\, x \in X \qquad x > N \Longrightarrow f(x) > M.$$

Deixa-se ao cuidado do leitor a definição de **limite de f quando $x$ tende para $+\infty$ é $-\infty$**, escrevendo-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Definição:

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $X$ é um conjunto não minorado, diz-se que o **limite de f quando $x$ tende para $-\infty$** é $+\infty$ e escreve-se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\; \exists\, N \in \mathbb{R}\; \forall\, x \in X \qquad x < N \Longrightarrow f(x) > M.$$

Deixa-se ao cuidado do leitor a definição de **limite de f quando $x$ tende para $-\infty$ é $-\infty$**, escrevendo-se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

**Definição**:

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **contínua no ponto** $\boldsymbol{a \in X}$ quando

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \qquad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Chama-se **descontínua no ponto** $\boldsymbol{a \in X}$ uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua nesse ponto.

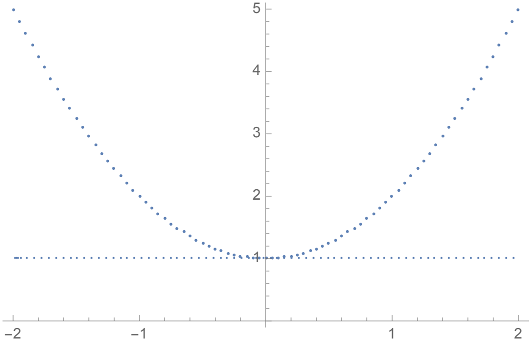
Diz-se que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **função contínua** quando $f$ é contínua em todos os pontos $a \in X$.

**Proposição**:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$. A função $f$ é contínua em $a$ se e só se ocorre uma das situações seguintes:

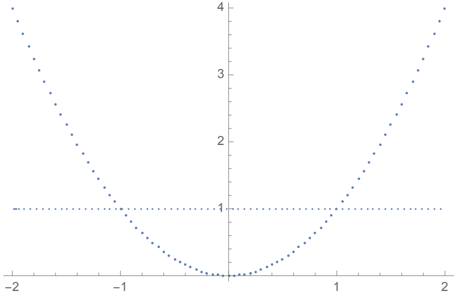
1. $a$ é ponto isolado de $X$
2. $a$ é ponto de acumulação de $X$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

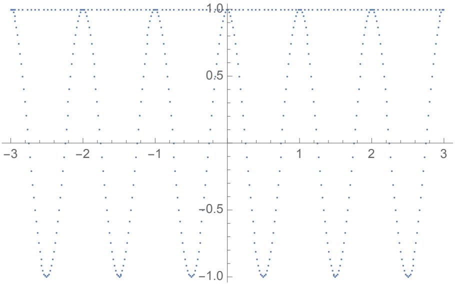


# Há funções definidas em $\mathbb{R}$ contínuas em exatamente dois pontos

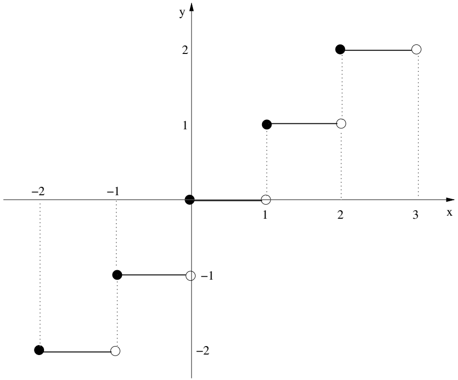
$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}
\end{array}
$$



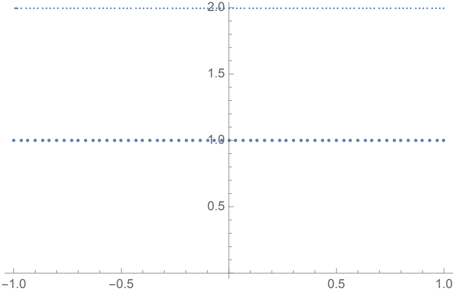
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$



$$\begin{array}{rccc} [\,\cdot\,]: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$



$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}
\end{array}
$$



Teorema **[Aritmética de funções contínuas]**:

Dadas $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in X$,

1. $f + g$ e $fg$ são funções contínuas em $a$;
2. se $g(a) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $a$.

<u>Teorema</u> [**Continuidade da função composta**]:

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua em $a \in X$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $f(a)$. Então $g \circ f$ é contínua em $a$.

(A composta de funções contínuas é contínua).

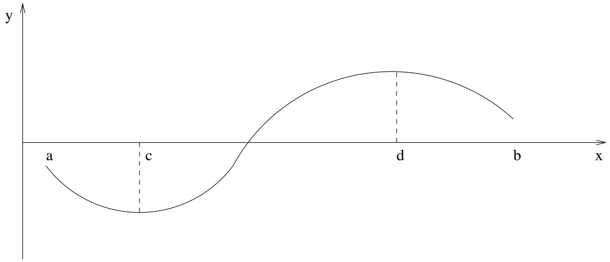
**Teorema** [**Continuidade da restrição**]:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $A$ um subconjunto não vazio de $X$. Então $f_{|A}$ é contínua.

**Teorema [de Weierstrass]**:

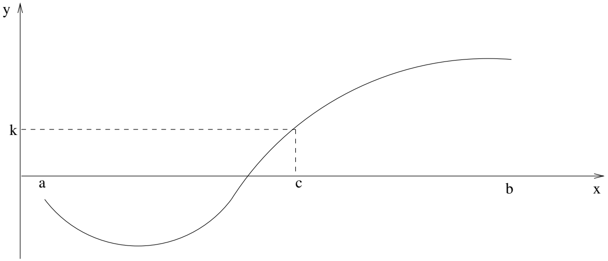
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\exists\, c,\, d \in [a, b]\ \forall\, x \in [a, b] \qquad f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$



**Teorema** **[de Bolzano-Cauchy ou do valor intermédio]**:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \neq f(b)$. Se $k$ é um número real estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) = k$.



**Corolário**:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponhamos que $f(a)f(b) < 0$. Então existe $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

**Corolário**:

Sejam $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.

Teorema [**Continuidade da função inversa**]:

Sejam $I$ e $J$ intervalos de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow J$ uma função bijetiva e contínua. Então $f^{-1}$ é contínua.