número sete

introdução à análise real

fernando miranda e lisa santos

departamento de matemática
universidade do minho

publicação do departamento de matemática
da universidade do minho

publicado pelo departamento de matemática
da universidade do minho
campus de gualtar, 4710-054
braga, portugal

primeira edição, setembro 2004
segunda edição, setembro 2010

ISBN 972-8810-05-9

número sete

introdução à análise real

fernando miranda e lisa santos

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

A Matemática não conhece raças
nem fronteiras geográficas;
para a Matemática,
o mundo cultural é um país.
(David Hilbert)

A primeira edição deste texto coincidiu com o início da Licenciatura em Matemática na Universidade do Minho, que resultou da reestruturação da anterior Licenciatura em Ensino de Matemática. Nessa altura foi implementado um novo tipo de aulas, designadas por *aulas de trabalhos orientados*, que tinham como objectivo ensinar os alunos a estudar de forma mais autónoma e, simultaneamente, a escrever com maior rigor matemático.

Entendemos que um apoio importante para o bom funcionamento deste modelo consistia na elaboração de uns apontamentos, recheados de exemplos e com alguns exercícios resolvidos no final de cada capítulo.

À data da segunda edição destes apontamentos, a Licenciatura em Matemática da Universidade do Minho encontra-se reestruturada de acordo com os princípios da Declaração de Bolonha, cujas recomendações vêm ao encontro das orientações subjacentes ao modelo anterior. Os autores consideram, por isso, que este texto se mantém um suporte adequado à aprendizagem do Cálculo.

Esta segunda edição preenche pequenas lacunas que existiam no texto original e corrige algumas gralhas. Apesar das correcções, agradecemos aos leitores que nos vão fazendo chegar sugestões ou indicações das gralhas que encontrem, para os endereços electrónicos `fmiranda@math.uminho.pt` ou `lisa@math.uminho.pt`.

No final de cada capítulo há uma lista de exercícios. Em alguns dos capítulos essa lista é extensa, pois é o resultado da junção de exercícios retirados de livros clássicos de Análise em $\mathbb{R}$ com exercícios elaborados por nós para exames de disciplinas de Análise leccionadas ao longo dos anos.

Há capítulos com muitos mais exercícios que outros. Essa distribuição desigual dos exercícios prende-se com as ferramentas necessárias para a sua resolução.

Estas notas são o corolário dos vários anos em que os autores leccionaram, quer aulas teóricas, quer aulas teórico-práticas de cursos de Análise Real e reflectem a sua forma de ensinar, onde é dada relevância à apresentação de exemplos e de contra-exemplos, elementos importantes, na sua opinião, na formação de uma "intuição" analítica.

O Capítulo 1 introduz o conjunto dos números reais axiomaticamente. Preferiríamos ter apresentado o conjunto dos números naturais axiomaticamente, obtendo, a partir destes, por construção, os números inteiros, seguidamente os racionais e por último os reais. No entanto, esta opção envolve o conhecimento de conceitos que os alunos não possuem e que não é usual introduzir num curso de Análise. Faz-se ainda neste capítulo uma breve referência a conjuntos finitos e infinitos e introduzem-se algumas noções topológicas na recta real.

O Capítulo 2 dedica-se ao estudo de sucessões e séries numéricas. É aqui demonstrada a completude topológica de $\mathbb{R}$ e enunciado, sem demonstração, o Teorema de Riemann, que estabelece que, dada uma série convergente não absolutamente convergente e um número real qualquer, a série admite um rearranjo dos termos de modo a que a sua soma seja o número real dado.

No Capítulo 3 introduzem-se conceitos importantes sobre funções reais de variável real, dando-se particular realce ao estudo da continuidade. São apresentados diversos exemplos de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contínuas apenas em certos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

No Capítulo 4 apresenta-se uma definição cuidadosa da função exponencial de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e da sua inversa, a função logarítmo de base a. Estudam-se brevemente as propriedades das funções trigonométricas e hiperbólicas e apresentam-se as funções trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas.

O Capítulo 5 faz uma síntese dos teoremas mais importantes sobre continuidade de funções reais de variável real. Muitos destes teoremas serão frequentemente utilizados pelos alunos em disciplinas de anos posteriores.

No Capítulo 6 introduz-se a noção de derivada, deduzem-se as propriedades das derivadas e demonstram-se alguns resultados importantes. Também aqui são apresentados vários exemplos de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ deriváveis apenas em certos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Apresenta-se a definição de derivada de ordem superior, concluindo-se o capítulo com as relações entre os conjuntos das funções de classe $\mathscr{C}^k$ e das funções deriváveis até à ordem k, com $k \in \mathbb{N}$.

Para terminar refira-se que a ortografia do texto não está conforme as disposições do Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa actualmente em vigor. A adequação à nova ortografia ficará para uma futura reimpressão, fornecendo aos autores o tempo necessário à sua aprendizagem.

1. O corpo dos números reais

O infinito!
Nenhuma outra questão transformou
tão profundamente o espírito humano.
(David Hilbert)

Ao longo da disciplina de Cálculo I, os conceitos de função e de número real são fundamentais. Neste capítulo recordamos algumas noções relativas ao conceito de função, definimos, de forma axiomática, o conjunto dos números reais e apresentamos algumas das suas propriedades. Serão também introduzidas noções topológicas, em $\mathbb{R}$, utilizadas nos capítulos seguintes.

1.1 Generalidades sobre funções

Começamos por recordar algumas noções relativas ao conceito de função, aproveitando para fixar notações.

Definição 1.1 *Chamamos* **função** *a dois conjuntos não vazios, X e Y, munidos de uma lei de formação ou regra de correspondência, f, que a cada elemento x de X associa um único elemento $f(x)$ de Y. Em geral denotamos a função por $f : X \longrightarrow Y$. Usa-se a notação $x \longmapsto f(x)$ para indicar que o elemento x é enviado por f em $f(x)$ ou que f faz corresponder a x o elemento $f(x)$.*

Definição 1.2 *Dados dois conjuntos A e B, o conjunto dos pares ordenados (a, b) cuja primeira coordenada pertence a A e a segunda a B define o* **produto cartesiano de A e**

B, *que se representa por* $A \times B$. *Tem-se então* $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Nota 1.3

- *Dado um conjunto* A, $\quad \emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.
- *Dados dois conjuntos não vazios* A *e* B, *se* $A \neq B$, *então* $A \times B \neq B \times A$.
- *Dado um conjunto* A, *designa-se por* **quadrado cartesiano de** $\boldsymbol{A}$ *o conjunto* $A^2 = A \times A$.
- *O conjunto* $\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\}$, *que se designa por* **diagonal de** $\boldsymbol{A}^2$, *coincide com* A^2 *apenas quando* A *é o conjunto vazio ou um conjunto singular.* ■

Definição 1.4 *Dados os conjuntos* X *e* Y *e a função* $f : X \longrightarrow Y$, *designa-se:*

- *o conjunto* X *por* **domínio** *da função e denotamo-lo por* $\mathrm{Dom}(f)$;
- *o conjunto* $f(X) = \mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) : x \in X\}$ *por* **contradomínio** *ou* **imagem** *da função;*
- *os elementos* x *de* X *por* **objectos**;
- *os elementos* $f(x)$ *tais que* $x \in X$ *por* **imagens**;
- *o conjunto* $\mathrm{Gr}\,(f) = \{(x,y) \in X \times Y : \ y = f(x)\}$ *por* **gráfico de** $\boldsymbol{f}$.

É frequente dizermos "a função f" em vez de "a função $f : A \longrightarrow B$" quando não existem dúvidas sobre o domínio e o conjunto de chegada da função.

Definição 1.5 *Dada uma função* $f : X \longrightarrow Y$, A *um subconjunto de* X, B *um subconjunto de* Y, *denomina-se por:*

- **imagem de** $\boldsymbol{A}$ **por** $\boldsymbol{f}$ *ou* $f(A)$ *o conjunto* $\{f(x) : x \in A\}$;
- **imagem recíproca de** $\boldsymbol{B}$ **por** $\boldsymbol{f}$ *ou* $f^{-1}(B)$ *o conjunto* $\{x \in X : f(x) \in B\}$.

Definição 1.6 *Uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *diz-se:*

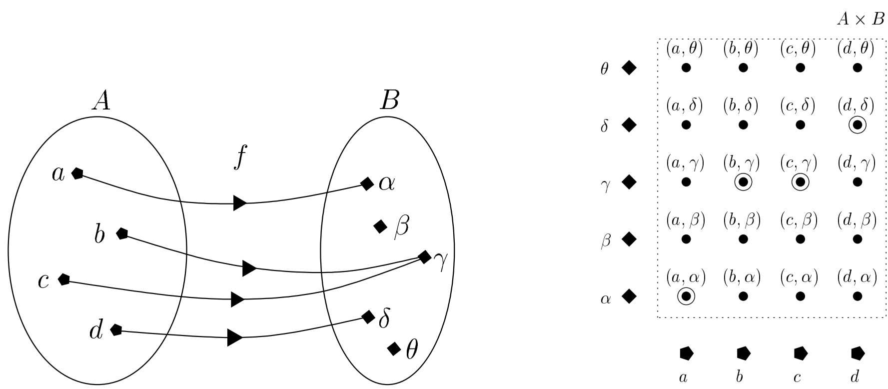
- **injectiva** *se* $\qquad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$;

- **sobrejectiva** *se* $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X : \quad f(x) = y$;

- **bijectiva** *se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva.*

Definição 1.7 *Dado um conjunto X não vazio, define-se $\mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$ e designa-se* **função identidade (em X)**, *a função tal que $\mathrm{Id}_X(x) = x,\ \forall\, x \in X$.*

Dado um conjunto não vazio X, a função identidade em X é uma função bijectiva. O gráfico de Id_X é o conjunto Δ_X.



(a) (b)

Figura 1.1: Representação de uma função $f : A \longrightarrow B$ usando um diagrama (a) e através do seu gráfico (b).

Exemplo 1.8 *Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta\}$, considere-se a função $f : A \longrightarrow B$ representada na Figura 1.1 (a) através de um diagrama. Em (b) representa-se o gráfico de f, identificando com $\odot$ os elementos de $A \times B$ que pertencem a $\mathrm{Gr}\,(f)$.*

Relativamente a esta função tem-se:

- $\mathrm{Dom}\,(f) = A$;

- $\mathrm{Im}\,(f) = f(A) = \{\alpha, \gamma, \delta\} \subsetneq B$, *logo f não é sobrejectiva;*

- *f não é injectiva, visto que $f^{-1}(\{\gamma\}) = \{b, c\}$.* ■

Definição 1.9 *Dadas duas funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow W$, define-se a* **função g composta com f** *(escreve-se $g \circ f$) do seguinte modo:*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & X & \longrightarrow & W \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Figura 1.2: Composição de funções.

Definição 1.10 *Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, uma função $g : Y \longrightarrow X$ diz-se* **inversa de f** *se $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Uma função que admite inversa diz-se* **invertível**.

Nota 1.11 *Facilmente se verifica que se $f : X \longrightarrow Y$ é invertível, a sua inversa é única. Podemos então denotar a função inversa de f por $f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Observe-se que f^{-1} é invertível e que $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.* ■

Proposição 1.12 *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é invertível se e só se é bijectiva.*

Demonstração:

$\Longrightarrow$ Designando por $g : Y \longrightarrow X$ a função inversa de f, dados $x_1, x_2 \in X$, tem-se que $x_1 = g(f(x_1))$ e $x_2 = g(f(x_2))$. É então imediato que, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$, logo f é injectiva.

Para concluir a sobrejectividade de f, basta observar que $\forall y \in Y \quad y = f(g(y))$.

$\Longleftarrow$ Pelo facto de f ser bijectiva, sabemos que

$$\forall\, y \in Y\ \exists^1 x_y \in X : \qquad f(x_y) = y.$$

Defina-se $\begin{array}{rccc} g: & Y & \longrightarrow & X. \\ & y & \longmapsto & x_y \end{array}$ Claramente, $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Então f é invertível. □

1.2 O corpo dos números reais

Apesar do conceito de função ter sido definido usando conjuntos não vazios quaisquer, nesta unidade curricular todas as noções passarão a ser apresentadas no contexto dos números reais.

Justifica-se assim dedicar alguma atenção ao conjunto dos números reais. Iremos *definir* o conjunto dos números reais, que representaremos por $\mathbb{R}$, dar a conhecer algumas das suas propriedades e apresentar alguns conceitos topológicos sobre este mesmo conjunto.

A designação "número real" não é estranha para quem ingressa numa licenciatura em matemática. Haverá então necessidade de *definir* o conjunto dos números reais? A melhor maneira de justificar essa necessidade será colocando a pergunta:

O que é um número real?

O conhecimento adquirido por um aluno que terminou o ensino secundário, provavelmente, não lhe permite dar uma resposta satisfatória. É suposto que o aluno saiba dar exemplos de números reais, que conheça e saiba efectuar operações com números reais, que saiba que existem números reais que são solução da equação $x^2 - 2 = 0$ mas que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$. Tudo isto desconhecendo uma *definição* de número real e sem assistir a uma *construção* do conjunto dos números reais.

Optamos por definir axiomaticamente o conjunto dos números reais[1], apresentando um conjunto de propriedades (axiomas) verificadas, de forma exclusiva, pelos elementos desse conjunto.

Essas propriedades são referidas de forma global dizendo que o conjunto dos números reais é um *corpo ordenado completo*.

Uma outra forma de definir o conjunto dos números reais é seguir um processo *construtivo*, começando pelo conjunto mais simples, aquele cujos elementos estão associados ao acto da contagem, o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$; depois alargando o conceito de número para obter o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$; o passo seguinte é a obtenção do conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$; finalmente constroem-se os números reais.

As sucessivas expansões que permitem construir $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$, exigem a utilização de conceitos que saem fora do âmbito desta unidade curricular, daí a nossa opção pela definição axiomática. O processo detalhado da construção

---

[1] De facto, não estamos a caracterizar um conjunto mas sim uma estrutura algébrica, formada por um conjunto, duas operações e uma relação de ordem.

do conjunto dos números reais pode ser seguido, por exemplo, em *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, F. R. Dias Agudo, Escolar Editora, 1989.

Voltando à definição axiomática, comecemos por um axioma de existência:

Axioma *Existe um corpo ordenado completo,* $\mathbb{R}$*, chamado corpo dos números reais.*

Vejamos então agora o significado de corpo ordenado completo, aplicado ao corpo dos números reais, cuja existência é assegurada pelo axioma anterior.

Axiomas de corpo *Consideremos o conjunto* $\mathbb{R}$ *munido de duas operações, a adição* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e a multiplicação* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, verificando as propriedades seguintes:*

A1 $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad x + y = y + x$ *comutatividade da adição;*

A2 $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$ *associatividade da adição;*

A3 $\exists\, 0 \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad 0 + x = x$ *existência de zero, elemento neutro da adição;*

A4 $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R} \qquad x + y = 0$ *existência de simétrico;*

A5 $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad x \cdot y = y \cdot x$ *comutatividade da multiplicação;*

A6 $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *associatividade da multiplicação;*

A7 $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad 1 \cdot x = x$ *existência de elemento neutro da multiplicação, designado elemento um;*

A8 $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\, y \in \mathbb{R} \qquad x \cdot y = 1$ *existência de inverso;*

A9 $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *distributividade da multiplicação relativamente à adição.*

Estes axiomas conferem a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *uma estrutura que se designa de corpo.*

Nota 1.13 *No axioma A3 define-se como elemento neutro da adição um elemento, denotado por 0, tal que* $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad 0 + x = x$*. Naturalmente que da comutatividade da adição, garantida pelo axioma A1, resulta que 0 é elemento neutro da adição se e só se* $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad 0 + x = x + 0 = x$*.*

De forma análoga se conclui que:

1 *é elemento neutro da multiplicação se e só se* $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad 1\cdot x = x\cdot 1 = x$;

y *é simétrico de* x *se e só se* $\quad x+y=y+x=0$;

y *é inverso de* $x\neq 0$ *se e só se* $\quad x\cdot y = y\cdot x = 1$. ■

Proposição 1.14

1. *O zero, elemento neutro da adição, é único.*
2. *O simétrico de um elemento é único.*
3. *A adição verifica a lei do corte, isto é,* $\quad x+z=y+z \Longrightarrow x=y$.
4. *O zero, elemento neutro da adição, é elemento absorvente da multiplicação, isto é,* $0\cdot x = x\cdot 0 = 0, \forall\, x\in\mathbb{R}$.
5. *O um, elemento neutro da multiplicação, é único.*
6. *O inverso de um elemento (diferente de zero) é único.*
7. *A multiplicação verifica a lei do corte, isto é,* $\quad (x\cdot z = y\cdot z \text{ e } z\neq 0) \Longrightarrow x=y$.

Demonstração:

1. Suponhamos que $\theta\in\mathbb{R}$ é também elemento neutro da adição. Tem-se então que:

$$0+\theta=\theta, \text{ porque } 0 \text{ é elemento neutro;}$$
$$0+\theta=0, \text{ porque } \theta \text{ é elemento neutro.}$$

   Concluímos assim que $\theta=0$, donde resulta a unicidade do elemento neutro da adição.

2. Dados x, y, $z\in\mathbb{R}$, pela associatividade da adição tem-se $(z+x)+y=z+(x+y)$. Se z e y são simétricos de x então, da identidade anterior, resulta $0+y=z+0$ logo, pela definição de elemento neutro da adição, $y=z$. Conclui-se assim a unicidade do simétrico.

3. Basta somar o simétrico de z a ambos os membros da igualdade $\quad x+z=y+z$, usar a associatividade e as definições de simétrico e de elemento neutro da adição.

4. Usando A3 e A9 tem-se que $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$; usando a lei do corte da adição tem-se $0 \cdot x = 0$.

   As proposições 5. e 6. demonstram-se de forma análoga ao caso aditivo.

7. Se $z \neq 0$, multiplicando à direita ambos os membros da igualdade $x \cdot z = y \cdot z$ por z^{-1} obtém-se, usando a associatividade da multiplicação, as definições de inverso e de elemento neutro da multiplicação, $x = y$. Como zero é o elemento absorvente da multiplicação, conclui-se que a implicação não se verifica no caso em que $z = 0$. $\square$

Uma vez provadas a unicidade do simétrico e do inverso, o simétrico de um elemento x costuma-se representar por $-x$ e o inverso de um elemento não nulo y por y^{-1}.

São imediatas as propriedades

1. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad -(-x) = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

A adição definida em $\mathbb{R}$ e o facto de todos os números reais terem um e um só simétrico, permitem definir uma nova operação em $\mathbb{R}$, a **subtracção**, da seguinte forma: dados dois números reais x e y, define-se $x - y$ e chama-se a diferença entre x e y à soma de x com $-y$.

À custa da multiplicação e da existência e unicidade de inverso para todo o número real diferente de zero, define-se a **divisão**: dados $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, define-se quociente de x por y e representa-se por $\frac{x}{y}$ o produto de x por y^{-1}.

Salienta-se ainda, relativamente à multiplicação, que é vulgar omitir o sinal de multiplicação, representando-se por xy o produto de x por y.

Note-se que a estrutura de corpo não caracteriza o conjunto dos números reais, isto é, existem outros corpos para além do corpo dos reais. Daí a necessidade de exigir um pouco mais, em particular, de introduzir no corpo dos números reais uma estrutura que permitirá ordenar os seus elementos. Fá-lo-emos da forma que passamos a descrever.

Axiomas de ordem *Existe um subconjunto de $\mathbb{R}$, que representamos por $\mathbb{R}^+$, e que designamos como conjunto dos números positivos, que verifica os axiomas seguintes:*

A10 $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+ \qquad x+y \in \mathbb{R}^+$ *e* $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$ *a soma e o produto de dois números positivos é um número positivo;*

A11 $\forall\, x \in \mathbb{R}$, *verifica-se uma e uma só das situações seguintes:*

$$x = 0,\ x \in \mathbb{R}^+,\ -x \in \mathbb{R}^+ \qquad \textit{propriedade tricotómica.}$$

O conjunto dos números reais está agora munido de uma estrutura de corpo ordenado.

Nota 1.15 *Definindo* $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$, *a tricotomia garantida pelo axioma A11 é equivalente a dizer que* $\mathbb{R}$ *é a união disjunta de* $\mathbb{R}^-$, $\{0\}$ *e* $\mathbb{R}^+$. ■

Definição 1.16 *Dados* x *e* y *em* $\mathbb{R}$, *diz-se que* $\boldsymbol{x}$ **é menor do que** $\boldsymbol{y}$ *e escreve-se* $x < y$ *se* $y - x \in \mathbb{R}^+$.

Define-se também a relação **menor ou igual**, $\leq$, *da forma natural:*

$$x \leq y \qquad \text{se} \qquad x = y \quad \text{ou} \quad x < y.$$

Nota 1.17 *A razão porque atribuímos aos axiomas* **A10** *e* **A11** *a designação de "axiomas de ordem" tem a ver com o facto destes axiomas conferirem propriedades à relação* $\leq$ *que a tornam numa relação de ordem*[2]. ■

Definição 1.18 *A partir das relações* $<$ *e* $\leq$ *definem-se as relações maior,* $>$, *e maior ou igual,* $\geq$, *do modo seguinte:*

$x > y$ *se e só se* $y < x$;

$x \geq y$ *se e só se* $y \leq x$.

Exemplo 1.19 *Apresentamos, como exemplo, algumas propriedades resultantes do facto de* $\mathbb{R}$ *ser um corpo ordenado:*

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad x(-y) = (-x)y = -(xy)$;

---

[2] Chama-se *relação de ordem* a uma relação binária reflexiva, anti-simétrica e transitiva; na unidade curricular de Tópicos de Matemática será clarificado o significado destes conceitos.

2. *$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad x^2 = (-x)^2\,;$*

3. *se $x < y$ então, para todo o $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$ (monotonia da adição);*

4. *se $x < y$ então, para todo o $z > 0$, tem-se $xz < yz$. Se, no entanto, for $z < 0$, então $xz > yz$ (monotonia da multiplicação);*

5. *$x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$;*

6. *$1 \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração:

1. Usando o facto de zero ser elemento absorvente da multiplicação, a definição de simétrico e a distributividade da multiplicação relativamente à adição tem-se $0 = x \cdot 0 = x(y - y) = xy + x(-y)$. Conclui-se assim que $x\,(-y)$ é o simétrico de xy, isto é, $-(xy) = x\,(-y)$. Para mostrar que $-(xy) = (-x)\,y$ basta trocar x com y na identidade demonstrada.

2. Tomando $y = -x$ na primeira identidade do ponto anterior tem-se

$$x^2 = x\,(-\,(-x)) = (-x)\,(-x) = (-x)^2\,.$$

3. Se $x < y$, então $y - x \in \mathbb{R}^+$, donde $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+$, o que significa que $x + z < y + z$.

4. Se $x < y$ e $z > 0$, então $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}^+$, logo o seu produto é um elemento de $\mathbb{R}^+$. Então $(y - x)z = yz - xz \in \mathbb{R}^+$, o que significa que $xz < yz$.
   Se, por outro lado, $x < y$ e $z < 0$, então $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $-z \in \mathbb{R}^+$, logo o seu produto é um elemento de $\mathbb{R}^+$. Como $(y - x)(-z) = xz - yz \in \mathbb{R}^+$, isto significa que $yx < xz$ que é o mesmo que $xz > yx$.

5. Como $x \neq 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$. Se $x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 \in \mathbb{R}^+$ logo $x^2 > 0$. Se $-x \in \mathbb{R}^+$, $(-x)^2 = x^2 \in \mathbb{R}^+$ logo $x^2 > 0$.

6. Basta observar que $1 = 1 \cdot 1$ e usar a alínea anterior. $\blacksquare$

A relação de ordem definida em $\mathbb{R}$ permite-nos introduzir as noções de majorante, minorante, supremo e ínfimo de um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 1.20 *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é*

- **majorante de** X *se* $\quad \forall\, x \in X \qquad x \leq a$;
- **minorante de** X *se* $\quad \forall\, x \in X \qquad a \leq x$;
- **máximo de** X *se a é majorante de X e $a \in X$. Representa-se $a = \max X$;*
- **mínimo de** X *se a é minorante de X e $a \in X$. Representa-se $a = \min X$.*

Nota 1.21 *Observe-se que, se a é majorante de X, qualquer elemento maior do que a é também majorante de X. Analogamente, se a é minorante de X, qualquer elemento menor do que a é minorante de X.* ■

Definição 1.22 *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se* **majorado** *ou* **limitado superiormente**, *respectivamente* **minorado** *ou* **limitado inferiormente**, *se possui algum majorante, respectivamente minorante. Se X é simultaneamente majorado e minorado diz-se* **limitado**.

Definição 1.23 *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se* **supremo de** $\boldsymbol{X}$ *e representa-se $a = \sup X$, se verifica as duas condições seguintes:*

1. $\forall\, x \in X \quad x \leq a \qquad$ *(a é majorante de X);*
2. *se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall\, x \in X,\ x \leq b$, então $a \leq b \qquad$ (a é o menor dos majorantes).*

Definição 1.24 *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se* **ínfimo de** $\boldsymbol{X}$ *e representa-se $a = \inf X$, se verifica as duas condições seguintes:*

1. $\forall\, x \in X \quad a \leq x \qquad$ *(a é minorante de X);*
2. *se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall\, x \in X,\ b \leq x$, então $b \leq a \qquad$ (a é o maior dos minorantes).*

Exemplo 1.25 *Consideremos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \leq x < 3\}$.*

O conjunto X é limitado, visto que 0 é minorante e 3 é majorante de X. Sendo 0 um minorante de X e pertencendo ao conjunto X, conclui-se que 0 é mínimo de X. O facto *de 0 pertencer a X permite concluir que nenhum número real positivo é minorante de X, logo 0 é o maior dos minorantes, ou seja, 0 é ínfimo de X.*

É simples verificar que qualquer número real menor do que 3 não é majorante de X: com efeito, se $x \leq 0$, então x não é majorante de X porque 1 é um elemento de X maior do que x; se $0 < x < 3$, como $x < \frac{3+x}{2} < 3$, conclui-se que $\frac{3+x}{2}$ é um elemento de X maior do que x.

Tem-se então que $3 = \sup X$ e X não tem máximo (decorre do que foi dito atrás que nenhum elemento de X é majorante de X). ■

Nota 1.26 *Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, representamos por $-X$ o conjunto dos simétricos dos elementos de X, isto é, $-X = \{-x : x \in X\}$.* ■

Apresentam-se de seguida algumas consequências das definições anteriores.

Proposição 1.27

1. *O supremo e o ínfimo de um conjunto, quando existem, são únicos.*
2. *Se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $b < \sup X$, respectivamente $b > \inf X$, então existe $x \in X$ tal que $b < x$, respectivamente $b > x$.*
3. *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, majorado, respectivamente minorado, tem máximo, respectivamente mínimo, se e só se $\sup X \in X$, respectivamente $\inf X \in X$.*
4. *Se $X \subseteq \mathbb{R}$ é majorado, respectivamente minorado, então $-X$ é minorado, respectivamente majorado.*
5. *Se $X \subseteq \mathbb{R}$ admite supremo, então $-X$ possui ínfimo e $\inf(-X) = -\sup X$.*
6. *Se $X \subseteq \mathbb{R}$ admite ínfimo, então $-X$ possui supremo e $\sup(-X) = -\inf X$.*

Demonstração:

1. Admitindo que $a = \sup X$ e $b = \sup X$ tem-se:
   - b é majorante de X logo, como a é supremo de X, verifica-se a relação $a \leq b$;
   - a é majorante de X logo, como b é supremo de X, verifica-se a relação $b \leq a$.

Mas então $a = b$, donde se conclui a unicidade do supremo.
De forma análoga se conclui a unicidade do ínfimo.

2. Se $b < \sup X$, então b não é majorante de X, logo existe $x \in X$ tal que $b < x$.

3. $\Longrightarrow$
Se $a = \max X$, então a é majorante de X e qualquer número real menor do que a não é majorante de X, porque $a \in X$. Então $a = \sup X$.
$\Longleftarrow$
Se $a = \sup X$ (em particular a é majorante de X) e $a \in X$ então $a = \max X$.

4. Suponhamos que X é majorado e seja a um majorante de X. Tem-se então $x \leq a$, $\forall\, x \in X$; pela monotonia da multiplicação concluímos que $-x \geq -a$, $\forall\, x \in X$, logo $-a$ é minorante de $-X$, donde se conclui que $-X$ é minorado.

5. Se $a = \sup X$ então, pela alínea anterior, $-a$ é minorante de $-X$. Seja $b > -a$. Então $-b < a$. Como $a = \sup X$, existe $x \in X$ tal que $-b < x$, ou seja, $b > -x$; como $-x \in -X$ concluímos que b não é minorante de $-X$, logo $-a$ é o maior dos minorantes de $-X$, isto é, $-a = \inf(-X)$.

6. Usar o mesmo raciocínio da alínea anterior. $\square$

Retomando os axiomas de corpo ordenado e completo, estamos agora em condições de definir o axioma do supremo.

Axioma do supremo ou da completude

A12 *Todo o subconjunto não vazio e majorado de $\mathbb{R}$ tem supremo.*

Proposição 1.28 *Todo o subconjunto não vazio e minorado de $\mathbb{R}$ tem ínfimo.*

Demonstração: Se $X \subseteq \mathbb{R}$ é minorado e não vazio então, pela alínea 4 da Proposição 1.27, $-X$ é majorado logo, pelo axioma A12, $-X$ tem supremo. Usando agora a alínea 5 da Proposição 1.27, e observando que $-(-X) = X$, concluímos que $\inf(X) = -\sup(-X)$. $\square$

Apresentados os axiomas de corpo ordenado completo, fica assim clarificado o significado do primeiro axioma apresentado, aquele que *garante* a existência de um corpo ordenado completo.

No entanto, como pretendíamos caracterizar *o corpo dos números reais*, subsiste o problema da unicidade.

Na verdade não podemos afirmar que existe um e um só corpo ordenado completo.

Definindo $\mathbb{R}$ de forma axiomática, a natureza dos objectos que formam o conjunto dos números reais não é relevante. O que importa são, de facto, as relações entre esses objectos.

Nesta perspectiva, se $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}, \leq_{\mathbb{K}})$ representar um corpo ordenado completo, pode provar-se que existe uma forma de identificar os elementos de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{K}$ que torna os dois corpos indistinguíveis, do ponto de vista das propriedades dos corpos ordenados e completos. Na realidade, existe uma bijecção $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) +_{\mathbb{K}} f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot_{\mathbb{K}} f(y)$ e $x \leq y \Longleftrightarrow x \leq_{\mathbb{K}} y$. Esta aplicação f diz-se um *isomorfismo* entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{K}$.

A existência desse isomorfismo garante que é indiferente a escolha do corpo onde se *opera*.

Como exemplo, suponhamos que, dados $x, y \in \mathbb{R}$, se pretende determinar a soma destes dois elementos. O resultado é o mesmo, procedendo de qualquer uma das seguintes formas:

- usar a adição definida em $\mathbb{R}$, calculando $x + y$;
- *transferir* os elementos para $\mathbb{K}$, determinando $f(x)$ e $f(y)$, calcular $f(x) +_{\mathbb{K}} f(y)$ e trazer o resultado para $\mathbb{R}$, determinando $f^{-1}\left(f(x) +_{\mathbb{K}} f(y)\right)$.

A existência do isomorfismo diz que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{K}$ são, no fundo, formados pelos mesmos objectos, usando, eventualmente, diferentes representações para esses objectos.

Note-se que, sempre que nos referimos ao corpo dos números reais, estamos a falar de uma estrutura algébrica formada por um conjunto, duas operações e uma relação de ordem, no entanto, representaremos por $\mathbb{R}$ tanto o conjunto como o corpo dos números reais. Essa simplificação não compromete o rigor nem causa, em geral, confusão, pois o contexto se encarrega de clarificar se nos estamos a referir à estrutura algébrica ou apenas ao seu conjunto suporte.

1.2.1 Alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$

A opção de definir axiomaticamente os números reais, em alternativa à opção de os *construir*, tem como consequência que *perdemos* conjuntos que apareciam de forma natural se optássemos pelo método construtivo. Estamo-nos a referir aos conjuntos dos números naturais, $\mathbb{N}$, dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, dos números racionais, $\mathbb{Q}$. Vamos então *recuperar* ou identificar os elementos de $\mathbb{R}$ que pertencem a cada um desses conjuntos, isto é, vamos identificar esses conjuntos com subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Começando pelos **números naturais**, definimos $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- $1 \in \mathbb{N}$;
- se $n \in \mathbb{N}$ então $n+1 \in \mathbb{N}$.

Note-se que a forma recursiva como foi definido $\mathbb{N}$ põe em evidência a propriedade fundamental dos números naturais (números que estão subjacentes ao acto da contagem) que é o facto de cada número natural ter um *sucessor* que é também um número natural.

O conjunto dos **números inteiros** é a união disjunta de três conjuntos: o conjunto dos números naturais, o conjuntos dos simétricos dos números naturais e o conjunto singular contendo o zero.

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \ \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$, $mn^{-1} = \frac{m}{n}$ é um número real. A todos os números reais desta forma chamamos **números racionais**. Temos assim que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Nota 1.29 *Qualquer número racional tem uma infinidade de representações distintas, visto que* $\forall m \in \mathbb{Z}\ \forall n,\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$ ■

Temos assim definidos como subconjuntos de $\mathbb{R}$ os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais.

Da forma como foram definidos estes conjuntos é imediato reconhecer as seguintes inclusões:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Chamamos **números irracionais** a todos os números reais que não são números racionais e ao conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ chamamos o conjunto dos números irracionais.

Desde a escola pitagórica se sabe que $\sqrt{2}$, a medida da hipotenusa de um triângulo rectângulo cujos catetos têm medida um, solução da equação $x^2 - 2 = 0$, não é racional.

Definição 1.30 *Um número real diz-se* **algébrico** *se é zero de um polinómio* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *não identicamente nulo, com coeficientes inteiros. Todo o número real que não é algébrico diz-se* **transcendente**.

Nota 1.31 *Qualquer número racional é algébrico, uma vez que, a cada representação desse número racional, podemos associar um polinómio do primeiro grau com coeficientes inteiros cujo zero é o número racional em causa. É também imediato, pelo que foi dito atrás, que* $\sqrt{2}$ *é algébrico.*

Os números irracionais π *e* e *são exemplos de números transcendentes. As demonstrações de que* π *é irracional e* e *é transcendente, não sendo triviais, podem ser vistas, por exemplo, em Cálculo Infinitesimal, Michael Spivak, Editora Reverté, 1991.* ■

Definição 1.32 *Dado* $I \subseteq \mathbb{R}$, I *é um* **intervalo** *se*

$$\forall\, a,\, b \in I \;\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad a \leq x \leq b \Longrightarrow x \in I.$$

Intervalo é então a designação dada a qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ que possui a propriedade de conter todos os números entre dois quaisquer dos seus elementos.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, usaremos as notações seguintes:

$$\begin{array}{ll}
[a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\; a \leq x \leq b\} &]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} :\; x \leq b\} \\[2em]
[a,b[\; = \{x \in \mathbb{R} :\; a \leq x < b\} &]-\infty, b[\; = \{x \in \mathbb{R} :\; x < b\} \\[2em]
]a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\; a < x \leq b\} & [a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} :\; a \leq x\} \\[2em]
]a,b[\; = \{x \in \mathbb{R} :\; a < x < b\} &]a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} :\; a < x\}
\end{array}$$

Refira-se que os intervalos da coluna da esquerda são limitados enquanto os da coluna da direita são ilimitados. Os elementos a e b são designados extremos dos intervalos anteriormente definidos.

Consoante um extremo pertence ou não ao intervalo, diz-se que esse intervalo é respectivamente fechado ou aberto nesse extremo. Assim, por exemplo, dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$:

$[a, b]$ é um intervalo fechado;

$[a, b[$ é um intervalo, fechado em a e aberto em b ou fechado à esquerda;

$]a, b]$ é um intervalo, aberto em a e fechado em b ou fechado à direita;

$]a, b[$ é um intervalo aberto.

Note-se que o próprio conjunto $\mathbb{R}$ é um intervalo, podendo ser representado como $]-\infty, +\infty[$.

São também intervalos, ditos *intervalos degenerados*, os conjuntos singulares e o conjunto vazio. Assim tem-se $\{a\} = [a, a]$ e $\emptyset =]a, a[$.

1.2.2 Propriedades dos números reais

Teorema 1.33 (propriedade arquimediana) *Dados $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Demonstração: Suponhamos que a propriedade não é válida.

Observando que, da tricotomia garantida pelo axioma de ordem A11, a negação de "ser maior" é "ser menor ou igual", estamos a supor que existem $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$ tais que $\forall n \in \mathbb{N}\ nx \leq y$.

Como $x \neq 0$, tem-se que $\forall n \in \mathbb{N}\ n \leq yx^{-1}$, isto é, $\mathbb{N}$ é um conjunto majorado em $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ é completo, $\mathbb{N}$ tem supremo. Designando por a o supremo de $\mathbb{N}$, $a-1$ não é majorante de $\mathbb{N}$, logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a-1 < m$, o que equivale a dizer que $a < m+1$, o que é absurdo, visto que $m+1 \in \mathbb{N}$ e $a = \sup \mathbb{N}$.

O absurdo resultou da suposição de que a proposição não era verdadeira, o que demonstra a proposição. $\square$

Proposição 1.34 *As proposições seguintes são equivalentes:*

1. $\mathbb{R}$ *é arquimediano;*
2. $\mathbb{N}$ *é um conjunto não majorado em* $\mathbb{R}$*;*
3. $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \;\exists\, n \in \mathbb{N} \,:\; 0 < \frac{1}{n} < a.$

Demonstração: Vamos mostrar que 2 é uma consequência de 1, 3 é uma consequência de 2 e que 1 é uma consequência de 3.

$1 \Longrightarrow 2$ Admitindo que $\mathbb{R}$ é arquimediano, vejamos que $\mathbb{N}$ não é majorado.

Dado $a \in \mathbb{R}$, a propriedade arquimediana, aplicada a 1 (que pertence a $\mathbb{R}^+$) e a a, garante a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot 1 > a$ ou seja $n > a$, donde se conclui que a não é majorante de $\mathbb{N}$. Concluímos assim que nenhum número real é majorante de $\mathbb{N}$, logo $\mathbb{N}$ não é majorado.

$2 \Longrightarrow 3$ Dado $a \in \mathbb{R}^+$, como $\mathbb{N}$ não é majorado, $\frac{1}{a}$ não é majorante de $\mathbb{N}$, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a} < n$. Observando que $\frac{a}{n} > 0$, multiplicando ambos os membros da última desigualdade por $\frac{a}{n}$ e usando a monotonia da multiplicação, obtém-se $\frac{1}{n} < a$. Basta observar que $\frac{1}{n} > 0$ para concluir que $0 < \frac{1}{n} < a$.

$3 \Longrightarrow 1$ Sejam $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$. Se:

$y \leq 0$ então, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y \leq 0 < nx$;

$y > 0$ então $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}^+$, logo $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \frac{x}{y}$. Como $ny > 0$, usando a monotonia da multiplicação, tem-se $0 < y < nx$.

Concluímos assim que $\mathbb{R}$ é arquimediano. $\square$

Nota 1.35

Dado $a \in \mathbb{R}^+$, *o número 3 da proposição anterior garante a existência de um número racional entre zero e* a.

Decorre também da proposição anterior que $0 = \inf\left\{\frac{1}{n} :\; n \in \mathbb{N}\right\}$. $\blacksquare$

Recordemos agora a noção de *valor absoluto* ou *módulo* de um número real.

Definição 1.36 *Dado $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ representa o* **valor absoluto** *ou* **módulo** *de x, definido da seguinte forma:* $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

A função $\begin{array}{rccc} |\cdot| : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$ designa-se **função valor absoluto** ou **função módulo**.

Nota 1.37 *São consequências imediatas da definição de valor absoluto e da estrutura de $\mathbb{R}$ que, dado $x \in \mathbb{R}$:*

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = \max\{x, -x\}$;
3. $-|x| \leq 0 \leq |x|$;
4. $-|x| \leq x \leq |x|$. ■

Vejamos agora algumas propriedades importantes do valor absoluto e como é definido o conceito de distância entre dois números reais.

Proposição 1.38 *Dados $x, r \in \mathbb{R}$ com $r \geq 0$, são afirmações equivalentes:*

1. $-r \leq x \leq r$;
2. $|x| \leq r$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} -r \leq x \leq r &\Longleftrightarrow [-r \leq x \text{ e } x \leq r] && \\ &\Longleftrightarrow [-x \leq r \text{ e } x \leq r] && \text{usando a monotonia da adição} \\ &\Longleftrightarrow |x| \leq r && \text{usando o número 2 da Nota 1.37} \end{aligned}$$ □

Proposição 1.39 *Dados $x, c, r \in \mathbb{R}$ com $r \geq 0$, tem-se $|x - c| \leq r$ se e só se $c - r \leq x \leq c + r$.*

Demonstração: Aplicar a Proposição 1.38, substituindo x por $x - c$ e usar a monotonia da adição. □

Nota 1.40

- *As duas proposições anteriores continuam verdadeiras se substituirmos* $\leq$ *por* $<$.
- *Resulta da Proposição 1.38 que o conjunto* $\{x \in \mathbb{R} : |x - c| \leq r\}$ *é o intervalo* $[c - r, c + r]$, *intervalo centrado em* c *de amplitude* $2r$. ■

Definição 1.41 *Dados* $x, y \in \mathbb{R}$, *define-se* **distância entre x e y** *como sendo* $|x - y|$.

Nota 1.42 *Os valores de* x *que verificam a inequação* $|x - c| \leq r$ *são todos os elementos cuja distância a* c *é menor ou igual a* r. *Na Figura 1.3 da página 26 apresenta-se uma interpretação geométrica destas noções.* ■

Proposição 1.43 *Dados* $x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$, *verificam-se as relações seguintes:*

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
2. $|xy| = |x||y|$;
3. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$;
4. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Demonstração:

1. Usando o ponto 4 da Nota 1.37 tem-se:

$$\begin{array}{rcccl} -|x| & \leq & x & \leq & |x| \\ -|y| & \leq & y & \leq & |y| \\ \hline -(|x| + |y|) & \leq & x + y & \leq & |x| + |y| \end{array}$$

somando ordenadamente (ver Exercício resolvido 1.1)

A última relação é, pela Proposição 1.38, equivalente a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. É deixada ao cuidado do leitor.

3. Da desigualdade 1. temos que $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, obtendo-se então $|x| - |y| \leq |x - y|$.

   Trocando x com y na última desigualdade, obtém-se $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$ que é equivalente a $-|x - y| \leq |x| - |y|$.

Temos então que $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$, que é equivalente, pela Proposição 1.38, a $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$.

4. Resulta da aplicação da desigualdade 1. à soma $(x-y)+(y-z)$. $\square$

1.3 Algumas noções de cardinalidade

Nesta secção define-se o que se entende por conjuntos finitos e infinitos e apresentam-se noções que permitem comparar a *quantidade* de elementos de dois conjuntos. Faz-se aqui uma abordagem superficial, omitindo as demonstrações da maior parte dos resultados, uma vez que este assunto será alvo de estudo na unidade curricular de Tópicos de Matemática.

Conjuntos finitos e conjuntos infinitos

Dado $n \in \mathbb{N}$, representaremos por I_n o conjunto dos números naturais desde 1 até n, ou seja, $I_n = \{p \in \mathbb{N} : p \leq n\}$.

Definição 1.44 *Um conjunto X diz-se* **finito** *quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijecção $\varphi : I_n \longrightarrow X$. No primeiro caso diz-se que X tem zero elementos enquanto que no segundo X tem n elementos.*

Um conjunto que não é finito diz-se **infinito**.

Naturalmente, para que não haja ambiguidade na definição de *número de elementos de um conjunto finito*, será necessário verificar que se $n, m \in \mathbb{N}$, $\varphi : I_n \longrightarrow X$ e $\psi : I_m \longrightarrow X$ são bijecções, então $n = m$.

Um resultado que também importa reter é o facto de $\mathbb{N}$ ser um conjunto infinito.

Definição 1.45 *Um conjunto X diz-se* **numerável** *quando existe uma bijecção $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$.*

Como exemplo de conjunto numerável é natural referir o próprio $\mathbb{N}$.

A existência de uma bijecção entre dois conjuntos diz-nos que podemos emparelhar os elementos dos dois conjuntos sem que sobrem elementos em qualquer deles. Parece assim natural concluir que esses conjuntos possuem a mesma *quantidade* de elementos. É esta a noção que apresentamos na definição seguinte.

Definição 1.46 *Um conjunto X diz-se* **equipotente** *a um conjunto Y se existe uma bijecção $\phi : X \longrightarrow Y$.*

Nota 1.47

- *Diz-se que dois conjuntos X e Y têm o mesmo cardinal (e representa-se $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ ou $\#X = \#Y$) se X e Y são conjuntos equipotentes.*
- *Diz-se que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ se existe uma função injectiva $\phi : X \longrightarrow Y$ ou, de forma equivalente, se existe uma função $\psi : Y \longrightarrow X$ sobrejectiva.*
- *Mostra-se que se $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ e $\mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(X)$, então $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$.*
- *Mostrar que $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$, isto é, mostrar que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ e $\mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(Y)$, é concluir que não existe uma função sobrejectiva $\phi : X \longrightarrow Y$ ou que não existe uma função injectiva $\psi : Y \longrightarrow X$.* ■

Introduzimos a noção de *cardinal* sem no entanto ter definido o que é o cardinal de um conjunto!

Se dois conjuntos finitos são equipotentes, eles têm, por um lado, o mesmo cardinal e por outro o mesmo número de elementos. Parece então que cardinal e número de elementos de um conjunto é a mesma coisa! No entanto não podemos definir cardinal como o número de elementos de um conjunto, já que este conceito se define apenas para conjuntos finitos. Podemos contudo falar no cardinal de um qualquer conjunto. Parece aceitável definir cardinal de um conjunto X como *aquilo que é comum a todos os conjuntos equipotentes a* X (cardinal é, de alguma forma, uma medida da *quantidade* de elementos de um conjunto).

Uma noção que é importante reter é que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma quantidade de elementos; existem conjuntos infinitos com diferentes cardinais.

Uma outra observação é que, quando se lida com cardinais, existem situações em que podemos ser *enganados* pela nossa intuição. Parece natural pensar que a quantidade de elementos de um conjunto diminui quando lhe retiramos um elemento. De facto quando se retira um elemento a um conjunto finito não vazio, o seu cardinal diminui. No entanto se efectuarmos a mesma operação num conjunto infinito, o cardinal não se altera.

Aliás esta pode ser uma forma alternativa de definir conjunto infinito: um conjunto é infinito se for equipotente a uma sua parte própria (subconjunto diferente do próprio conjunto).

Exemplos 1.48

- $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}\setminus\{1\} \\ & n & \longmapsto & n+1 \end{array}$ *é uma bijecção, logo* $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *é numerável.*

- $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \{2n:\ n\in\mathbb{N}\} \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$ *é uma bijecção, logo o conjunto dos números naturais pares é numerável.*

- $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array}$ *é uma bijecção, donde se conclui que o conjunto dos números inteiros é numerável.*

■

Talvez menos óbvia é a afirmação de que $\mathbb{Q}$ é também um conjunto numerável. Comecemos por concluir que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é numerável.

Proposição 1.49 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *é numerável.*

Demonstração: A função $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & (n,1) \end{array}$ é injectiva, logo $\mathrm{card}(\mathbb{N}) \le \mathrm{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

Por outro lado, a função $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (n,m) & \longmapsto & 2^n3^m \end{array}$ é injectiva, donde se conclui que $\mathrm{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \le \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

Podemos então concluir que $\mathrm{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$. □

Proposição 1.50 *Se X e Y são conjuntos numeráveis então $X\times Y$ é numerável.*

Demonstração: A demonstração é deixada como exercício. □

Proposição 1.51 *O conjunto dos números racionais é numerável.*

Demonstração: A função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & n & \longmapsto & n \end{array}$, designada inclusão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$, é uma função injectiva, logo $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Q})$.

A função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (p,q) & \longmapsto & \frac{p}{q} \end{array}$ é sobrejectiva, logo $\operatorname{card}(\mathbb{Q}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$. Como $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ é numerável, tem-se que $\operatorname{card}(\mathbb{Q}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{N})$.

Concluímos então que $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathbb{Q})$, isto é, $\mathbb{Q}$ é numerável. □

Apesar de até agora termos concluído que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são todos eles conjuntos numeráveis, por isso mesmo tendo todos eles o mesmo cardinal, mostra-se que o conjunto dos números reais é um conjunto infinito não numerável. Naturalmente que o cardinal de $\mathbb{R}$ é estritamente maior que o cardinal de qualquer conjunto numerável.

Dado um conjunto X, designamos por **conjunto das partes de X** e representamos por $\mathscr{P}(X)$, o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X. Tem-se então que $A \in \mathscr{P}(X)$ se e só se $A \subseteq X$.

Note-se que $\mathscr{P}(X)$ nunca é vazio, já que $\emptyset \in \mathscr{P}(X)$ e $X \in \mathscr{P}(X)$.

Exemplo 1.52 *Consideremos o conjunto $\{a,b,c\}$.*

$$\mathscr{P}(\{a,b,c\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}.$$ ■

O teorema seguinte, apresentado sem demonstração, dá-nos uma forma de construir conjuntos de cardinal crescente:

Teorema 1.53 (de Cantor) *Dado um conjunto X, $\mathscr{P}(X)$ tem cardinal estritamente maior que X.* □

No caso em que X é um conjunto finito, a proposição é simples de ser verificada já que se reduz a um exercício de combinatória.

Se $X = \emptyset$, conjunto com zero elementos, $\mathscr{P}(X) = \{\emptyset\}$. $\mathscr{P}(X)$ é então um conjunto singular, isto é, um conjunto com um elemento.

Se X é um conjunto com $n \in \mathbb{N}$ elementos, então $\mathscr{P}(X)$ tem 2^n elementos.

Repare-se que, do Exemplo 1.52, podemos concluir que o conjunto das partes de um conjunto com 3 elementos tem $2^3 = 8$ elementos.

Para contar o número de subconjuntos de um conjunto finito com n elementos, temos que contar o número de subconjuntos com:

$$\begin{array}{lcl} 0 \text{ elementos} & - & 1 \\ 1 \text{ elemento} & - & n \\ 2 \text{ elementos} & - & \binom{n}{2} \\ \ldots & & \\ n \text{ elementos} & - & \binom{n}{n} \end{array}$$

Somando todas as parcelas, obtém-se então que o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto com n elementos é $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Finalmente, para concluir, basta usar o binómio de Newton:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Já foi referido anteriormente que o conjunto dos números reais é um conjunto cujo cardinal é estritamente maior do que o cardinal de $\mathbb{N}$. O Teorema de Cantor diz que o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ é também um conjunto com cardinal estritamente maior que o cardinal de $\mathbb{N}$. Mostra-se que $\mathbb{R}$ é equipotente a $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Saliente-se ainda o facto de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ser equipotente a $\mathbb{R}$.

1.4 Topologia da recta real

A identificação entre os números reais e os pontos de uma recta, designada por *recta real*, permite obter uma representação geométrica dos números reais, muito útil na compreensão e visualização de diversos conceitos envolvendo números reais. A associação que a cada número real faz corresponder um e um só ponto da recta, permite também usar uma linguagem geométrica, em que *"ponto"* passará a significar *"número real"*, dizer que "$x < y$" será dizer que "x está à esquerda de y" e, dados $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ representará a distância do ponto x ao ponto y. Nesta representação, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, o intervalo $[x, y]$ será representado pelo segmento de recta cujos extremos são os pontos x e y.

Na Figura 1.3 os pontos a e b representam números reais (identificados também por a e b) tais que $a < b < 0$, uma vez que a está à esquerda de b, estando este, por sua vez, à esquerda de zero.

O segmento de recta de extremos a e b, marcado com traço mais carregado , representa o intervalo $[a, b]$.

Representado está também um ponto c e o intervalo aberto centrado em c e de raio (semi-amplitude) $r > 0$, ou seja, o intervalo $]c-r,\, c+r[$. Este intervalo é o lugar geométrico dos pontos da recta, cuja distância a c é menor do que r ou, dito de forma equivalente, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \ |x - c| < r\}$.

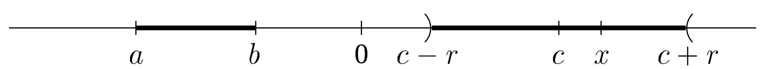


Figura 1.3: Recta real, com vários elementos representados.

A noção de *espaço topológico* será introduzida mais tarde no curso. Consiste, essencialmente, de um conjunto munido de uma estrutura que permite definir, por exemplo, as noções de limite e de continuidade de funções.

Se um determinado conjunto está munido de uma função que permite definir a distância entre dois quaisquer pontos desse conjunto, essa função *induz* uma *topologia* nesse espaço.

Vamos introduzir algumas noções de carácter topológico, no contexto dos números reais.

Definição 1.54 *Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $y \in \mathbb{R}$ diz-se:*

- **ponto interior de X** *se* $\exists\, \varepsilon > 0 \qquad]y - \varepsilon,\, y + \varepsilon[\, \subseteq X$;
- **ponto aderente a X** *se* $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad]y - \varepsilon,\, y + \varepsilon[\, \cap X \neq \emptyset$;
- **ponto de acumulação de X** *se* $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \big(]y - \varepsilon,\, y + \varepsilon[\, \setminus \{y\}\big) \cap\ X \neq \emptyset$;
- **ponto de acumulação à direita, de X** *se* $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad]y,\, y + \varepsilon[\, \cap X \neq \emptyset$;
- **ponto de acumulação à esquerda, de X** *se* $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad]y - \varepsilon,\, y[\, \cap X \neq \emptyset$;
- **ponto isolado de X** *se pertencer a X mas não for ponto de acumulação de X, isto é,* $\exists\, \varepsilon > 0 \qquad]y - \varepsilon,\, y + \varepsilon[\, \cap X = \{y\}$;

- **ponto de fronteira de $\boldsymbol{X}$** *se for ponto aderente a* X *e a* $\mathbb{R}\setminus X$*, isto é,*
$\forall\,\varepsilon>0 \qquad]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\,\cap X\neq\emptyset$ *e* $]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\,\cap(\mathbb{R}\setminus X)\neq\emptyset$.

Definição 1.55 *Seja* $X\subseteq\mathbb{R}$*. Designa-se:*

- **interior de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por* $\operatorname{Int}X$ *ou* $\mathring{X}$*, o conjunto dos ponto interiores de* X*;*

- **aderência de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por* $\operatorname{Ad}X$ *ou* $\overline{X}$*, o conjunto dos pontos aderentes a* X*;*

- **derivado de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por* X'*, o conjunto dos pontos de acumulação de* X*.* X'_+ *representa o conjunto dos pontos de acumulação à direita e* X'_- *representa o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda, de* X*;*

- **fronteira de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por* $\mathrm{Fr\,X}$ *ou* ∂X*, o conjunto dos pontos de fronteira de* X*.*

Exemplo 1.56 *Considerando o conjunto* $A=[-1,\,1[\,\cup\{2\}\cup\big([3,\,4]\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\big)$*, tem-se:*

$\mathring{A}=\,]-1,\,1[$;

$\overline{A}=\ [-1,\,1]\ \cup\{2\}\cup[3,4]$;

$A'_-=\,]-1,\,1]\cup\,]3,\,4]$;

$A'_+=\ [-1,\,1[\,\cup\,[3,\,4[$;

$A'=A'_-\cup A'_+=\ [-1,\,1]\,\cup\,[3,\,4]$;

$\mathrm{Fr\,A}=\{-1,1,2\}\cup\,[3,\,4]$. ■

Na proposição seguinte apresentam-se algumas consequências das definições introduzidas.

Proposição 1.57 *Seja* $X\subseteq\mathbb{R}$*. Então:*

1. $\mathring{X}\subseteq X\subseteq\overline{X}$;
2. $\mathrm{Fr\,X}=\mathrm{Fr}\,\mathbb{R}\setminus\mathrm{X}$;

3. $\overline{X} = X \cup \mathrm{Fr\,X} = \overset{\circ}{X} \cup \mathrm{Fr\,X} = X' \cup \mathrm{Fr\,X} = X' \cup \{$*pontos isolados de* $X\}$;

4. $\mathbb{R} = \overset{\circ}{X} \cup \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus X}} \cup \mathrm{Fr\,X}$;

5. $X' = X'_+ \cup X'_-$.

Demonstração: Demonstraremos, a título de exemplo, a alínea 4. Se $y \in \mathbb{R}$, então acontece uma das três seguintes situações:

- $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subseteq X$. Neste caso $y \in \overset{\circ}{X}$;
- $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus X$. Tem-se então que $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus X}}$;
- $\forall\, \varepsilon > 0$, $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\not\subseteq X$ e $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\not\subseteq \mathbb{R} \setminus X$, logo $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ intersecta $\mathbb{R} \setminus X$ e intersecta X, donde se conclui que $y \in \mathrm{Fr\,X}$. $\square$

Definição 1.58 *Um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *diz-se:*

- **aberto** *se coincidir com o seu interior;*
- **fechado** *se coincidir com a sua aderência.*

Proposição 1.59 *Um conjunto* X *é aberto se e só se o seu complementar,* $\mathbb{R} \setminus X$*, for fechado.*

Demonstração:

$\Longrightarrow$ Se X é aberto, todo o ponto de X pertence a $\overset{\circ}{X}$, por isso não é aderente a $\mathbb{R} \setminus X$. Tem-se então que $\overline{\mathbb{R} \setminus X} = \mathbb{R} \setminus X$, logo $\mathbb{R} \setminus X$ é fechado.

$\Longleftarrow$ Se $\mathbb{R} \setminus X$ é fechado, então dado um elemento de X ele não é aderente a $\mathbb{R} \setminus X$, por isso existe um intervalo centrado nesse ponto que não intersecta $\mathbb{R} \setminus X$, isto é, está contido em X. Conclui-se assim que é ponto interior de X, logo $\overset{\circ}{X} = X$, isto é X é aberto. $\square$

Exemplos 1.60

- *Um intervalo aberto é um conjunto aberto.*

- *Um intervalo fechado é um conjunto fechado.*
- $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}$ *são conjuntos fechados.*
- $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *não são abertos nem fechados.*
- $\mathbb{R}$ *e* $\emptyset$ *são conjuntos simultaneamente abertos e fechados.*
- *A aderência de um conjunto é um conjunto fechado.*
- *O interior de um conjunto é um conjunto aberto.* ■

Definição 1.61 *Dados X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, com $X \subseteq Y$, diz-se que* **X é denso em Y** *se todo o ponto de Y for aderente a X.*

Exemplos 1.62

- $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *são conjuntos densos em* $\mathbb{R}$.
- $\left\{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{N} \text{ com } m < n\right\}$ *é denso em* $[0,\, 1]$. ■

1.5 Exercícios resolvidos

Exercício resolvido 1.1 Mostre que

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq b_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2.$$

Resolução: Sejam a_1, a_2, b_1 e b_2 tais que

$$a_1 \leq b_1 \text{ e } a_2 \leq b_2.$$

Usando a monotonia e a comutatividade da adição, somando a_2 a ambos os membros da primeira desigualdade e b_1 a ambos os membros da segunda, obtém-se

$$a_1 + a_2 \leq b_1 + a_2 \text{ e } b_1 + a_2 \leq b_1 + b_2.$$

Então, pela transitividade da relação $\leq$, tem-se $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$. ■

Exercício resolvido 1.2 Seja $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ uma sequência *encaixada* de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, com $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ é não vazia (Princípio dos Intervalos Encaixados).

Resolução:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, verifica-se que $I_{n+1} \subseteq I_n$, isto é, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, logo

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Designando $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, é imediato reconhecer que qualquer elemento de B é majorante de A e que qualquer elemento de A é minorante de B logo, designando $a = \sup A$ e $b = \inf B$, tem-se

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq a \leq b \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluímos assim que $[a, b] \subseteq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $[a, b] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Podemos ainda verificar que a inclusão anterior é efectivamente uma igualdade, ou seja, que $[a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Com efeito, se $x < a$, então x não é majorante de A, isto é, existe a_n tal que $x < a_n$; mas então $x \notin [a_n, b_n]$, logo $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$; de forma análoga se mostra que se $y > b$ então $y \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. ■

Exercício resolvido 1.3 Mostre que o conjunto dos números reais não é numerável.

Resolução:

Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Consideremos um intervalo não degenerado, $[a_1, b_1]$, tal que $f(1) \notin [a_1, b_1]$.

Consideremos, de seguida, um intervalo não degenerado, $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, tal que $f(2) \notin [a_2, b_2]$.

Tendo definido o intervalo não degenerado $[a_n, b_n]$, definimos o intervalo não degenerado, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, tal que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ e $f(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Definimos assim, indutivamente, uma sequência de intervalos encaixados,

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

tal que $f(n) \notin [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então, por um lado $f(n) \notin \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} [a_m, b_m]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, por outro lado, o Princípio dos Intervalos Encaixados garante que $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} [a_m, b_m] \neq \emptyset$, logo a função f é não sobrejectiva. Conclui-se assim que não existem funções sobrejectivas de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ e por isso $\mathbb{R}$ é não numerável. ■

Exercício resolvido 1.4 Dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, mostre que $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Resolução:

Partindo de $x < y$, adicionando x a ambos os membros da desigualdade e usando a monotonia da adição, concluímos que $x + x < x + y$; usando a distributividade da multiplicação relativamente à adição, obtém-se que $2x < x + y$; multiplicando por $\frac{1}{2}$, usando as definições de inverso e de elemento um e a monotonia da multiplicação, obtém-se que $x < \frac{x+y}{2}$.

Para concluir que $\frac{x+y}{2} < y$ repetem-se os passos anteriores, adicionando y em vez de x a ambos os membros da desigualdade inicial. ■

Exercício resolvido 1.5 Um intervalo não degenerado é um conjunto infinito.

Resolução:

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, tomando $z_1 = \frac{x+y}{2}$, $z_2 = \frac{z_1+y}{2}$, $z_3 = \frac{z_2+y}{2}$, $\ldots$, $z_{n+1} = \frac{z_n+y}{2}$, ..., pelo exercício anterior concluímos que $x < z_1 < z_2 < \ldots < y$. Obtemos assim uma infinidade de números reais, que estão no intervalo de extremos x e y. ■

Exercício resolvido 1.6 Dado $x \in \mathbb{R}$ existe um e um só $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

O inteiro n nas condições anteriores é designado **característica de x** e representa-se $n = [x]$.

Resolução:

Dado $x \in \mathbb{R}$, a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ garante a existência de $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 > x$.

Consideremos o conjunto $K = \{k \in \mathbb{Z} : x < k\}$.

- O conjunto K é não vazio, uma vez que $k_0 \in K$.

- O conjunto K é minorado, pois x é um minorante de K.
- O Princípio da Boa Ordenação[3] garante que K tem primeiro elemento, isto é, $\exists\, m \in K$ tal que $m \leq k, \forall\, k \in K$.

O número inteiro m verifica as desigualdades $m - 1 \leq x < m$:

- $x < m$ visto que $m \in K$;
- $m - 1 \leq x$ pois $m - 1 \notin K$, caso contrário m não seria primeiro elemento de K.

Basta então tomar $n = m - 1$.

Até agora garantimos a existência mas não a unicidade de n. Admitamos que existiam $n, m \in \mathbb{Z}$ $n < m$ nas condições do exercício, isto é, $n \leq x < n + 1$ e $m \leq x < m + 1$. Como n e m são números inteiros, dizer $n < m$ é equivalente a dizer $n + 1 \leq m$. Mas então tem-se $[n, n+1[\, \cap \,[m, m+1[\, = \emptyset$, o que é absurdo pois $x \in [n, n+1[\, \cap \,[m, m+1[$. O absurdo resultou de ter suposto existirem n e m inteiros distintos nas condições do exercício, donde se conclui a unicidade. ■

Exercício resolvido 1.7 Se x e y são números reais, com $x < y$, mostre que existe um número racional r tal que $x < r < y$. Conclua que entre x e y existe uma infinidade de números racionais.

Resolução:

Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$, cuja existência e unicidade são garantidas pelo exercício anterior.

Se $n + 1 < y$, basta tomar $r = n + 1$.

Se $n + 1 \geq y$ então, usando a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$, seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < y - x$.

Observando a Figura 1.4 e tendo em atenção que

- $n < n + \frac{1}{m} < n + \frac{2}{m} < \cdots < n + \frac{m}{m} = n + 1$,
- $n < x < y < n + 1$,

[3] O Princípio da Boa Ordenação é enunciado na unidade curricular de Tópicos de Matemática

- $\frac{1}{m} < y - x$,

é simples convencermo-nos de que $\exists\, k \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $x < n + \frac{k}{m} < y$. Como $n + \frac{k}{m}$ é racional, encontramos r nas condições do problema.

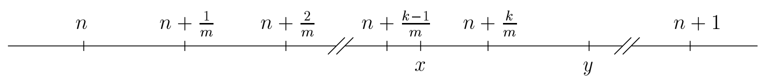


Figura 1.4: Ilustração do modo de encontrar um número racional entre dois números reais.

A demonstração da existência de $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $x < n + \frac{k}{m} < y$ faz-se usando o Princípio da Boa Ordenação, à semelhança do exercício anterior.

Considerando $P = \{p \in \mathbb{N} :\ x < n + \frac{p}{m}\}$, tem-se que P é um subconjunto não vazio ($m \in P$) de $\mathbb{N}$; seja k o primeiro elemento de P.

- $k \in P$, logo $x < n + \frac{k}{m}$;
- $k - 1 \notin P$, logo $n + \frac{k-1}{m} \leq x$;
- $\frac{1}{m} < y - x$, logo $x < n + \frac{k}{m} = n + \frac{k-1}{m} + \frac{1}{m} \leq x + \frac{1}{m} < x + (y - x) = y$.

Concluímos assim que podemos tomar $r = n + \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$.

Mostrámos que dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, existe um número racional, digamos r_1, tal que $x < r_1 < y$. Este resultado garante a existência de $r_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $r_1 < r_2 < y$. Aplicando recursivamente este raciocínio obtemos uma infinidade numerável de racionais tais que $x < r_1 < r_2 < \ldots < y$. ■

Exercício resolvido 1.8 Se x e y são números reais, com $x < y$ mostre que existe um número irracional z tal que $x < z < y$. Conclua que entre x e y existe uma infinidade de números irracionais.

Resolução: Tal como no exercício anterior, seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$. Como $1 < \sqrt{2}$, temos que $n \leq x < n + 1 < n + \sqrt{2}$

Se $n + \sqrt{2} < y$, basta tomar $z = n + \sqrt{2}$.

Se $n + \sqrt{2} \geq y$ então, usando a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$, seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{2}}{m} < y - x$.

Tendo presente que:

- $n < n + \frac{\sqrt{2}}{m} < n + \frac{2\sqrt{2}}{m} < \cdots < n + \frac{m\sqrt{2}}{m} = n + \sqrt{2}$,
- $n < x < y < n + \sqrt{2}$,
- $\frac{\sqrt{2}}{m} < y - x$,

concluímos que $\exists\, k \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $x < n + \frac{k\sqrt{2}}{m} < y$. Como $n + \frac{k\sqrt{2}}{m}$ é irracional, encontramos z nas condições do problema.

Aplique o raciocínio usado no exercício anterior para concluir que existe uma infinidade de números irracionais entre x e y. ■

Exercício resolvido 1.9 Se X é um conjunto finito, então $\overline{X} = \mathrm{Fr\,X} = X$ e $\overset{\circ}{X} = \emptyset$.

Resolução:

O conjunto X, sendo finito, não contém nenhum intervalo, caso contrário, pelo Exercício resolvido 1.5, seria um conjunto infinito.

Concluímos assim que $\overset{\circ}{X} = \emptyset$ e que $\mathrm{Fr\,X} \supseteq X$

Seja $y \in \mathbb{R} \setminus X$. O conjunto $\{|x-y| : x \in X\}$ é um subconjunto finito de $\mathbb{R}^+$, logo tomando $\varepsilon = \min\{|x-y| : x \in X\}$, tem-se que $\varepsilon > 0$.

Como $]y-\varepsilon, y+\varepsilon\,[\, \cap X = \emptyset$, concluímos que $\overline{X} = X$ e que $\mathrm{Fr\,X} \subseteq X$.

Como $\mathrm{Fr\,x} \supseteq X$ e $\mathrm{Fr\,X} \subseteq X$, então $\mathrm{Fr\,X} = X$. ■

1.6 Exercícios propostos

Exercício 1.1 Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique que não existe:

a) um número irracional entre $\frac{1}{100}$ e $\frac{2}{100}$;

b) um número racional, estritamente positivo, menor do que qualquer irracional positivo;

c) o maior número racional menor do que 1;

d) um conjunto numerável de números irracionais;

e) uma função injectiva mas não sobrejectiva de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$;

f) dois conjuntos, X e Y, ambos numeráveis, tais que $X \subseteq \mathbb{N}$, $Y \subseteq \mathbb{N} \setminus X$ e $\mathbb{N} \setminus (X \cup Y)$ é infinito;

g) dois conjuntos equipotentes, não vazios, X e Y, tais que Y é subconjunto próprio de X;

h) um conjunto numerável $X \subseteq]0,1[$;

i) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Q}$ injectiva.

Exercício 1.2 Mostre que:

a) $x, y \in \mathbb{Q} \implies x + y \in \mathbb{Q}$;

b) $x, y \in \mathbb{Q} \implies x\,y \in \mathbb{Q}$;

c) $x \in \mathbb{Q},\, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

d) $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies x\,y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

e) $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;\not\Longrightarrow\; x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

f) $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;\not\Longrightarrow\; x\,y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercício 1.3 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as proposições que se seguem:

a) se X é um subconjunto infinito de Y, então Y é não numerável;

b) $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{Q} \Longrightarrow X$ é numerável;

c) se X e Y são conjuntos equipotentes e se $f : X \longrightarrow Y$ é injectiva, então f é também sobrejectiva;

d) se $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejectiva e Y é infinito não numerável, então X é infinito não numerável;

e) se $A, B \subseteq \mathbb{R}$, B finito e $f : B \longrightarrow A$ é uma função com inversa à esquerda (isto é, existe $g : A \longrightarrow B$ tal que $g \circ f = Id_B$) então A é finito.

Exercício 1.4 Dado um conjunto finito X, mostre que uma função $f : X \longrightarrow X$ é injectiva se e só se é sobrejectiva.

Exercício 1.5 Defina uma função sobrejectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{-1}(\{n\})$ é infinito.

Exercício 1.6 Seja $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ é primo}\}$ e seja $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{N}$ uma função bijectiva. Em cada uma das alíneas apresente um exemplo de uma função nessas condições, ou justifique que não existe:

a) injectiva mas não sobrejectiva, de $\mathbb{N}$ em P;

b) injectiva mas não sobrejectiva, de P em $\mathbb{N}$;

c) bijectiva, de $\mathbb{N}$ em $-\mathbb{N} \cup P$;

d) bijectiva, de P em $S = \{p \in P : p \text{ é ímpar}\}$;

e) bijectiva, de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em P.

Exercício 1.7

a) Seja X um conjunto infinito e Y um conjunto numerável. Mostre que X é equipotente a $X \cup Y$.

b) Conclua, usando a alínea anterior, que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ têm o mesmo cardinal.

Exercício 1.8 Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são majorados, minorados, limitados. Indique ainda se têm supremo, ínfimo, máximo ou mínimo:

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| = |2x|\}$;

b) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x^2+2x+1} > \frac{1}{2x}\right\}$;

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 0,\ |x^2-1| < x+5\right\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : |x-5| < |x+1|\}$;

e) $]-\infty, 2[$;

f) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

g) $]1,2] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

h) $]1,2] \cap \mathbb{Q}$.

Exercício 1.9 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determine:

a) $\sup f([-1,1[)$;

b) $\inf f([-1,1])$;

c) o conjunto dos majorantes de $f([3,7\,[\cap \mathbb{Q})$;

d) um conjunto A tal que $f(A)$ não seja majorado;

e) o conjunto dos minorantes de $f(\mathbb{R})$.

Exercício 1.10 Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira:

Se A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, minorado e aberto, então o ínfimo de A não pertence a A.

Exercício 1.11 Mostre que os seguintes números reais são algébricos:

a) $\dfrac{101}{79}$;

b) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$;

c) $\sqrt[20]{1-\sqrt[3]{221}}$;

d) $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}$.

Exercício 1.12 Sabendo que e é um número transcendente, mostre que e^2 também é transcendente.

Exercício 1.13 Seja $A = \big(]0,2[\setminus\{1\}\big) \cup \{3\} \cup \big([4,5] \cap \mathbb{Q}\big)$.

a) Mostre que A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ e $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ são todos diferentes.

b) Mostre que $\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ e que $\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.

Exercício 1.14 Verifique se $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ são subconjuntos abertos $\mathbb{R}$. Verifique também se são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$.

Exercício 1.15 Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando:

a) dado um conjunto A, se $A' \subseteq \mathbb{Q}$, então $A \subseteq \mathbb{Q}$;

b) se A é um subconjunto numerável de $\mathbb{R}$ então $\overline{A}$ é numerável;

c) se A é um subconjunto numerável de $\mathbb{R}$ então $\mathring{A}$ é vazio;

d) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto e $a \in A$, então $A \setminus \{a\}$ é aberto.

Exercício 1.16 Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são subconjuntos densos de $\mathbb{R}$.

Exercício 1.17 Diga se existem subconjuntos A de $\mathbb{R}$ tais que:

a) $\overline{A} = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Fr}(A) = [0,1]$;

b) $\overline{A} = [0,1]$ e $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$;

c) $\overline{A} = [0,1]$ e $\mathrm{Fr}(A) \subseteq]0,1[$;

d) $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$, (quantos?);

e) $\mathrm{Fr}(A) = \{0\}$ (quantos?);

f) $\mathrm{Fr}(A) = [0,+\infty[$;

g) $\mathrm{Fr}(A) =]0,+\infty[$;

h) $\mathrm{Fr}(A) = \{0,1\}$ (quantos?);

i) $\mathrm{Fr}(A) = [0,1]$;

j) $\mathrm{Fr}(A) = \mathbb{N}$.

Exercício 1.18 Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe:

a) um subconjunto de $\mathbb{R}$ com um único ponto de acumulação;

b) um subconjunto de $\mathbb{R}$ cujo conjunto de pontos de acumulação seja $\mathbb{N}$;

c) um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ cujo ínfimo pertença ao seu interior.

2. Sucessões e séries

Não se preocupe com as suas
dificuldades na matemática;
garanto-lhe que as minhas são maiores.
(Albert Einstein)

Neste capítulo vamos fazer o estudo de sucessões e séries numéricas.

No Capítulo 1, $\mathbb{R}$ foi apresentado aos alunos como um corpo, ordenado e completo, significando completo que todo o subconjunto majorado de $\mathbb{R}$ tem supremo. Os alunos verão mais tarde que, num espaço métrico, isto é, num conjunto munido de uma distância, se pode definir uma noção de completude. Mais concretamente, um espaço métrico diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy for convergente (os conceitos de sucessão de Cauchy e sucessão convergente serão introduzidos neste capítulo de maneira rigorosa). Para além de outros resultados, vamos mostrar que o axioma do supremo tem como consequência que $\mathbb{R}$ é completo no sentido "topológico" , tomando para distância entre os pontos x e y o módulo de $x - y$.

Os alunos não conhecem ainda o conceito de série, que corresponde à formalização do significado de soma de uma infinidade de parcelas. Frequentemente não conseguimos calcular a soma de uma série, mas podemos saber se essa soma existe ou não. Serão apresentados vários "critérios" de convergência de séries. Será enunciado, sem demonstração, o Teorema de Riemann, que nos diz que, se uma série é convergente mas não absolutamente convergente, podemos, reordenando convenientemente os seus termos, obter um qualquer valor para a soma da série que resulta da reordenação.

2.1 Sucessões

No capítulo anterior introduzimos o conjunto dos números naturais através da soma sucessiva do elemento 1. Aprendemos a reconhecer subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ou a identificar subconjuntos de $\mathbb{R}$ equipotentes a $\mathbb{N}$. Queremos agora trabalhar com funções especiais, as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, funções reais de variável natural, usualmente referidas por sucessões reais.

Definição 2.1 *Uma função* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se uma* **sucessão real**. *À regra de correspondência* $n \longmapsto a(n)$ *chamamos* **termo geral da sucessão** *e ao elemento* $a(n)$ *chamamos* **termo de ordem n**.

Exemplo 2.2 *Dado* $\lambda \in \mathbb{R}$, $a : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \lambda \end{array}$ *é uma sucessão, dita a* **sucessão constante** *igual a* λ. ■

Nota 2.3

1. *A particularidade que* $\mathbb{N}$ *tem de ser um conjunto numerável e bem ordenado permite--nos adoptar notações próprias para designar uma sucessão. Assim, dada uma sucessão* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, *denotando* $a(n)$ *por* a_n, *representamos a sucessão de uma das seguintes formas:*
   - $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$
   - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   - $(a_n)_n$ *simplesmente, se daí não advier confusão.*
2. *Utilizando as notações acima, o termo geral da sucessão é* $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, *e o seu n-ésimo termo, ou termo de ordem* n, *é* a_n. *É frequente utilizar-se a mesma notação para o termo geral de uma sucessão e o seu termo de ordem* n.
3. *Dada uma sucessão, o seu contradomínio designa-se por* **conjunto dos termos da sucessão**. ■

Dizemos que uma **sucessão** é **definida por recorrência** se o termo de ordem n da sucessão for definido à custa de alguns dos $n-1$ termos anteriores. Note-se que, pelo $2^{\underline{0}}$ Princípio de Indução Matemática, este processo define completamente a sucessão.

Exemplo 2.4 *Considere a seguinte sucessão definida por recorrência:*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Note-se que $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, $a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$, $\ldots$. ■

Definamos agora algumas operações com sucessões:

Definição 2.5 *Dadas duas sucessões $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e dado $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se:*

$$\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}} + \big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(a_n + b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lambda\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\lambda a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \cdot \big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(a_n b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exemplo 2.6

$$\big(2n\big)_n + \big(n^2+1\big)_n = \big(2n+n^2+1\big)_n = \Big(\big(n+1\big)^2\Big)_n.$$ ■

Antes de prosseguirmos com o estudo das sucessões, vamos apresentar algumas definições.

Definição 2.7 *Uma sucessão $(a_n)_n$ diz-se:*

- **estritamente crescente** *(respectivamente* **crescente***) se*

  $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$ *(respectivamente $a_n \leq a_{n+1}$);*

- **estritamente decrescente** *(respectivamente* **decrescente***) se*

  $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$ *(respectivamente $a_{n+1} \leq a_n$);*

- **estritamente monótona** *(respectivamente* **monótona***) se for estritamente crescente ou estritamente decrescente (respectivamente, crescente ou decrescente);*

- **majorada** *(respectivamente* **minorada**, **limitada***) se*

  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *for um conjunto majorado (respectivamente minorado, limitado).*

Nota 2.8 *As noções de sucessão majorada, minorada e limitada, definidas à custa do conjunto dos termos da sucessão, são equivalentes às definições seguintes:*

- $(a_n)_n$ *é majorada   se e só se* $\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M;$
- $(a_n)_n$ *é minorada   se e só se* $\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq M;$
- $(a_n)_n$ *é limitada   se e só se* $\exists\, M > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M.$ ■

Exemplo 2.9 *A sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ é estritamente decrescente e limitada.*

A sucessão é estritamente decrescente pois, dado $n \in \mathbb{N}$, como $n+1 > n$, então $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

A sucessão é limitada visto que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1$. ■

Exemplo 2.10 *A sucessão $(1+(-1)^n)_n$ não é monótona mas é limitada.*

Chamando $a_n = 1+(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $a_1 = 0 < a_2 = 2$ e $a_2 = 2 > a_3 = 0$, concluindo-se que a sucessão não é monótona.

Como $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \leq 2$, $(a_n)_n$ é limitada. ■

Definição 2.11 *Uma* **sucessão** *$(x_n)_n$ diz-se* **enquadrada** *pelas sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ se*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq x_n \leq b_n \qquad \text{ou} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq x_n \leq a_n.$$

Exemplo 2.12 *A sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ está enquadrada pela sucessão constante igual a zero e pela sucessão constante igual a 1.* ■

2.1.1 Convergência de sucessões

Intuitivamente, dizer que um número real é o limite de uma sucessão, é dizer que os termos da sucessão se vão, num certo sentido, aproximando desse valor. Não significa isso que, quando se passa dum termo para o seguinte, este esteja mais próximo do limite que o anterior; significa apenas que os termos da sucessão, a partir de uma certa ordem, estão tão próximos do limite quanto se pretenda. É esta noção que é apresentada na definição seguinte.

Definição 2.13 *Dado $a \in \mathbb{R}$, diz-se que uma* **sucessão** $(a_n)_n$ *é* **convergente para a**, *que* **tende para a** *ou que* **tem limite a**, *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n \geq p \qquad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Escreve-se $(a_n)_n \xrightarrow[n]{} a$, $a_n \xrightarrow[n]{} a$ *ou* $\lim_n a_n = a$.

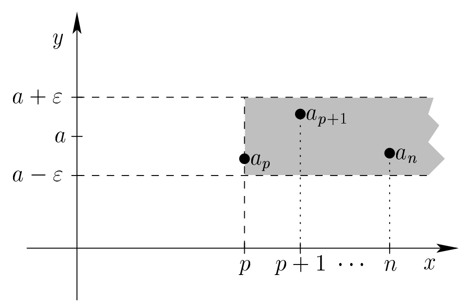


Figura 2.1: Interpretação geométrica do limite de uma sucessão.

Nota 2.14 *Observe-se que qualquer uma das proposições seguintes é equivalente à definição de convergência apresentada:*

- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n \geq p \qquad |a_n - a| \leq \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n > p \qquad |a_n - a| < \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N} \; \forall n > p \qquad |a_n - a| \leq \varepsilon$.

Observe-se ainda que, dado $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow a_n \in \,]a-\varepsilon, \, a+\varepsilon[.$$

Então, uma sucessão $(a_n)_n$ converge para a se e só se, fora de qualquer intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$, existe, quando muito, um número finito de termos da sucessão $(a_n)_n$. ■

Exemplo 2.15 *A sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge para zero.*

Fixe-se $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar um $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Observemos que:

- $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$;
- $n \geq p \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p}$.

Das observações anteriores decorre que, se escolhermos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \varepsilon$, provamos o que pretendemos. Tomemos então $p = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, em que $[x]$ significa o maior inteiro menor ou igual a x, normalmente designado por parte inteira ou característica de x (ver Exercício resolvido 1.6).

Note-se que a escolha de p não é única. Se a implicação (2.1) é verificada para uma certa escolha de p, ela é também verificada para uma qualquer escolha superior a p.

A escolha efectuada neste exemplo é, para cada ε, a menor possível. ■

Definição 2.16 *Uma sucessão $(a_n)_n$ diz-se* **convergente** *se existir um número real a tal que $\lim\limits_n a_n = a$. Uma sucessão que não é convergente diz-se* **divergente**.

Teorema 2.17 *Uma sucessão não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que existe uma sucessão $(a_n)_n$ com dois limites diferentes a e b, sendo $a < b$. Seja $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

Pelo facto do limite da sucessão $(a_n)_n$ ser a, temos que

$$\exists\, p_1 \in \mathbb{N} \; \forall\, n \geq p_1 \qquad a_n \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[.$$

Como, por outro lado, o limite de $(a_n)_n$ é b, verifica-se que

$$\exists\, p_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p_2 \qquad a_n \in\ ]b-\varepsilon, b+\varepsilon[.$$

Então, se $n \geq \max\{p_1,\, p_2\}$, $a_n \in\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[\,\cap\,]\,b-\varepsilon, b+\varepsilon\,[$, o que é absurdo, uma vez que $]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[\,\cap\,]\,b-\varepsilon, b+\varepsilon\,[= \emptyset$. O absurdo resultou de termos suposto que a sucessão $(a_n)_n$ tinha dois limites diferentes. $\square$

Proposição 2.18 *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(a_n)_n$ uma sucessão convergente e $a = \lim\limits_n a_n$.

Para $\varepsilon = 1$ existe uma ordem p tal que

$$n > p \Longrightarrow a_n \in\ ]a-1,\, a+1[.$$

Considerando o conjunto finito $A = \{a_1, \ldots, a_p, a-1,\, a+1\}$, tomando $m = \min A$ e $M = \max A$, verifica-se que

$$m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

logo $(a_n)_n$ é limitada. $\square$

Proposição 2.19 *Sejam $(a_n)_n$ uma sucessão convergente para zero e $(b_n)_n$ uma sucessão limitada. Então $\big(a_n b_n\big)_n$ é uma sucessão convergente para zero.*

Demonstração: Como $(b_n)_n$ é uma sucessão limitada,

$$\exists\, M > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |b_n| \leq M.$$

Como $a_n \xrightarrow[n]{} 0$, fixado $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Então

$$n \geq p \Longrightarrow |a_n b_n| \leq M|a_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

donde se conclui que $a_n b_n \xrightarrow[n]{} 0.$ $\square$

Proposição 2.20 *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sucessões convergentes respectivamente para a e para b. Então:*

1. *$\big(a_n + b_n\big)_n$ é uma sucessão convergente para $a + b$;*
2. *$\big(a_n b_n\big)_n$ é uma sucessão convergente para ab;*
3. *se $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, então $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ é uma sucessão convergente para $\frac{a}{b}$.*

Demonstração:

1. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_n a_n = a$ e $\lim\limits_n b_n = b$, tem-se que
$$\exists\, p_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p_1 \qquad |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$
e
$$\exists\, p_2 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p_2 \qquad |b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$
Tomando $p = \max\{p_1,\, p_2\}$, tem-se então que
$$\forall\, n \geq p \qquad |a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
donde se conclui que $\lim\limits_n (a_n + b_n) = a + b$.

2. Observando que
$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b, \tag{2.2}$$
como $(a_n)_n$ é uma sucessão limitada (Proposição 2.18) e, pelo ponto 1, $\lim\limits_n (b_n - b) = 0$, usando a Proposição 2.19, concluímos que $\lim\limits_n a_n(b_n - b) = 0$. De forma análoga se conclui que $\lim\limits_n (a_n - a)b = 0$. Recorrendo de novo ao ponto 1 desta proposição e a (2.2), obtém-se que $\lim\limits_n (a_n b_n - ab) = \lim\limits_n a_n(b_n - b) + \lim\limits_n (a_n - a)b = 0$, logo $\lim\limits_n a_n b_n = ab$.

3. Começando por escrever
$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\,a_n - a\,b_n}{b\,b_n} = (b\,a_n - a\,b_n)\frac{1}{b\,b_n},$$

como $\lim_n (b\,a_n - a\,b_n) = 0$ e a sucessão $\left(\frac{1}{b\,b_n}\right)_n$ é limitada[1], concluímos, pela Proposição 2.19, que $\lim_n \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$, isto é, $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. □

Proposição 2.21 *Se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente para $a > 0$, então existe uma ordem, a partir da qual, todos os termos da sucessão são positivos.*

Demonstração: Como $a_n \xrightarrow[n]{} a$, para $\varepsilon = a > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Longrightarrow a_n \in \,]a - \varepsilon,\, a + \varepsilon[.$$

Observando que $]a - \varepsilon,\, a + \varepsilon[\, = \,]0,\, 2a[$ concluímos que $a_n > 0$, para $n \geq p$. □

Corolário 2.22 *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões convergentes. Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ para $n \geq n_0$, então $\lim_n a_n \leq \lim_n b_n$.*

Demonstração: Considerando a sucessão $(a_n - b_n)_n$, se supusermos que $\lim_n a_n - \lim_n b_n > 0$, pela proposição anterior concluímos que os termos da sucessão $(a_n - b_n)_n$ são positivos a partir de uma certa ordem, o que contraria a hipótese de que $a_n \leq b_n$, a partir da ordem n_0. □

Nota 2.23 *Observe-se que, se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são sucessões convergentes tais que, para $n \geq n_0$ se tem $a_n < b_n$, só podemos garantir que $\lim_n a_n \leq \lim_n b_n$.* ■

Exemplo 2.24 *Dado $n \in \mathbb{N}$, defina-se $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $b_n = 1$. É evidente que $a_n < b_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e, no entanto, $\lim_n a_n = \lim_n b_n$.* ■

Teorema 2.25 *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sucessões convergentes para $c \in \mathbb{R}$. Seja $(c_n)_n$ uma sucessão enquadrada por $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$. Então $c_n \xrightarrow[n]{} c$.*

Demonstração: Podemos supor que temos

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leq c_n \leq b_n.$$

---

[1] Como $b_n\, b \xrightarrow[n]{} b^2$, existe uma ordem, a partir da qual, os termos da sucessão $\left(b_n\, b\right)_n$ são maiores do que, por exemplo, $\frac{b^2}{2}$. Tem-se então que existe uma ordem, a partir da qual, os termos da sucessão $\left(\frac{1}{b\,b_n}\right)_n$ são positivos e menores do que $\frac{2}{b^2}$, logo $\left(\frac{1}{b\,b_n}\right)_n$ é limitada.

Então

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_n - c \leq c_n - c \leq b_n - c$$

e, consequentemente,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |c_n - c| \leq \max\{|a_n - c|, |b_n - c|\}.$$

Fixado $\varepsilon > 0$, como $a_n \xrightarrow[n]{} c$,

$$\exists\, p_1 \in \mathbb{N} \qquad n \geq p_1 \Longrightarrow |a_n - c| < \varepsilon,$$

e, como $b_n \xrightarrow[n]{} c$,

$$\exists\, p_2 \in \mathbb{N} \qquad n \geq p_2 \Longrightarrow |b_n - c| < \varepsilon.$$

Assim,

$$n \geq \max\{p_1, p_2\} \Longrightarrow \begin{cases} |a_n - c| < \varepsilon \\ |b_n - c| < \varepsilon. \end{cases}$$

Então, sendo $p = \max\{p_1, p_2\}$, temos que

$$n \geq p \Longrightarrow |c_n - c| < \varepsilon.$$

□

Exemplo 2.26 *A sucessão* $\left(\sqrt[n]{n}\right)_n$ *é convergente e* $\lim\limits_n \sqrt[n]{n} = 1$.

Observando que, para $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{n} \geq 1$, definindo $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$ tem-se que $h_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k \geq 1 + n\, h_n + \frac{n(n-1)}{2}\; h_n^2 \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}\; h_n^2\,, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Então

$$h_n^2 \leq \frac{2}{n}, \qquad \text{logo} \qquad 0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

por isso, por enquadramento, conclui-se que

$$h_n \xrightarrow[n]{} 0, \quad \text{donde} \quad \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \xrightarrow[n]{} 1.$$

■

Teorema 2.27 *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão monótona e limitada. Então $(a_n)_n$ é convergente e:*

- *se $(a_n)_n$ é crescente, $\lim\limits_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$;*
- *se $(a_n)_n$ é decrescente, $\lim\limits_n a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demonstração: Vamos fazer a demonstração no caso em que $(a_n)_n$ é crescente. A demonstração do outro caso é análoga.

Seja $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $a = \sup A$. Por definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon$ não é majorante de A, pelo que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_p > a - \varepsilon$. Como $(a_n)_n$ é crescente, $a_n \geq a_p$, qualquer que seja $n \geq p$. Então

$$n \geq p \Longrightarrow |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_p < \varepsilon. \qquad \square$$

Exemplo 2.28 *A sucessão do Exemplo 2.4, definida por recorrência do seguinte modo:*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{cases}$$

é crescente e majorada sendo, portanto, convergente e o seu limite é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- Provemos, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < \sqrt{3}$.

  - Para $n = 1$, $a_1 = 1 < \sqrt{3}$;

  - Supondo que $a_n < \sqrt{3}$, vejamos que o mesmo se passa com a_{n+1}:

  $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} < \sqrt{1 + \sqrt{3}} < \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$.

- Provemos, também por indução, que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$.

  - Para $n = 1$, $a_1 = 1 < \sqrt{2} = a_2$;

  - Supondo que $a_n < a_{n+1}$, mostremos que $a_{n+1} < a_{n+2}$: de facto

$$a_n < a_{n+1} \Longrightarrow 1 + a_n < 1 + a_{n+1} \Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} < \sqrt{1 + a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

Como $(a_n)_n$ é uma sucessão crescente e majorada, é convergente. Seja a o seu limite. Dado $n \in \mathbb{N}$, como se tem que $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$ e facilmente se verifica que $\lim_n a_{n+1} = \lim_n a_n$ (ver Proposição 2.34 ou Nota 2.53), conclui-se que

$$a^2 = \lim_n a_{n+1}^2 = \lim_n (1 + a_n) = 1 + a.$$

Então $a^2 - a - 1 = 0$, pelo que $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Observando que $a_n \geq 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, o limite de $(a_n)_n$ é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

Proposição 2.29 *A sucessão* $\left((1 + \frac{1}{n})^n \right)_n$ *é estritamente crescente e majorada, logo é convergente.*

Demonstração: De facto, se $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 3, \end{aligned}$$

uma vez que $k! \geq 2^{k-1}$, para todo o $k \in \mathbb{N}$, e que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) < 2$. Conclui-se então que a sucessão é limitada.

Por outro lado, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\ &\quad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right),\end{aligned}$$

é então imediato reconhecer que

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Então $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)_n$ é uma sucessão convergente. □

Definição 2.30 *Ao limite da sucessão* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)_n$ *chamamos* **número de Neper** *e designamo-lo por* e.

Proposição 2.31

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Demonstração: Foi visto na proposição anterior que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

pelo que, pelo Corolário 2.22,

$$e=\lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq\lim_n\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right). \tag{2.3}$$

Por outro lado,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right), \qquad \forall\, k\in\{2,\cdots,n\},$$

e, utilizando de novo o Corolário 2.22,

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

e

$$e \geq \lim_k \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right). \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) decorre o resultado enunciado. □

2.1.2 Subsucessões

Apresentamos agora a noção de subsucessão de uma sucessão e alguns resultados que envolvem este conceito e a noção de convergência.

Dada uma sucessão $(a_n)_n$, $\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ & n & \longmapsto & a_n \end{array}$ designamos por subsucessão de $(a_n)_n$ qualquer restrição de a a um subconjunto infinito M de $\mathbb{N}$. Representando os elementos de M por $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$, a subsucessão de a associada a M é então a função $\begin{array}{rccc} a_{|_M}: & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n_i & \longmapsto & a_{n_i} \end{array}$. Observe-se que podemos "transformar" $a_{|_M}$ numa função de domínio $\mathbb{N}$, considerando a composta de $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ com a função $\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{N} & \longrightarrow & M\,. \\ & i & \longmapsto & n_i \end{array}$

Uma vez que os elementos de M foram *indexados* de forma crescente, facilmente se observa que a função φ é estritamente crescente.

Como pretendemos que uma subsucessão seja uma sucessão, a definição de subsucessão que adoptamos é que apresentamos de seguida.

Definição 2.32 *Dada uma sucessão $(a_n)_n$, diz-se que $(b_n)_n$ é uma* **subsucessão** *ou* **sucessão parcial** *de $(a_n)_n$, se existir uma função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n = a_{\varphi(n)}$.*

Exemplo 2.33 *Considerando a sucessão $\left(1,\, \frac{1}{2},\, 1,\, \frac{1}{3},\, 1,\, \frac{1}{4},\, \ldots,\, 1,\, \frac{1}{n},\, \ldots\right)$, que vamos designar por $(a_n)_n$, as seguintes sucessões são subsucessões de $(a_n)_n$:*

- $(1)_n$, *que é, por exemplo, a subsucessão dos termos de ordem ímpar de* $(a_n)_n$, $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, *ou a subsucessão dos termos de* $(a_n)_n$ *cuja ordem é um múltiplo de 6 mais 3,* $(a_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$;
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$, *a subsucessão dos termos de ordem par de* $(a_n)_n$, $(a_{2n})_n$;
- $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$, *a subsucessão de* $(a_n)_n$ *que resulta da eliminação dos termos cuja ordem é um múltiplo de 4 mais 3.* ■

Proposição 2.34 *Se* $(a_n)_n$ *é uma sucessão convergente para* a, *qualquer sua subsucessão é convergente para* a.

Demonstração: Se $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma função estritamente crescente, $\varphi(n) \geq n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, logo a conclusão de que $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a decorre da definição de limite. □

Corolário 2.35 *Se uma sucessão* $(a_n)_n$ *possuir uma subsucessão divergente ou admitir subsucessões convergentes para limites diferentes então* $(a_n)_n$ *é divergente.*

Demonstração: Usar a proposição anterior. □

Exemplo 2.36 *Consideremos a sucessão* $(a_n)_n$ *definida por* [2]

$$a_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n} & \textit{se} \quad n = \dot{3}, \\ \frac{n+1}{n} & \textit{se} \quad n = \dot{3} + 1, \\ \frac{n}{n+1} & \textit{se} \quad n = \dot{3} + 2. \end{cases}$$

Como $a_{3n} \xrightarrow[n]{} 2$ *e* $a_{3n+1} \xrightarrow[n]{} 1$, *concluímos que* $(a_n)_n$ *é divergente.* ■

Proposição 2.37 *Sejam* $\left(a_{\varphi_1(n)}\right)_n$, $\left(a_{\varphi_2(n)}\right)_n$, $\ldots, \left(a_{\varphi_k(n)}\right)_n$ *um número finito de subsucessões de* $(a_n)_n$ *tais que:*

1. $\mathbb{N} = \varphi_1(\mathbb{N}) \cup \varphi_2(\mathbb{N}) \cup \ldots \cup \varphi_k(\mathbb{N})$;

---

[2] Para $k \in \mathbb{N}$, usamos a notação $\dot{k}$ para representar os múltiplos de k, $\dot{k}+1$ para representar os múltiplos de k mais 1, isto é, os naturais cujo resto da divisão por k é igual a 1, etc..

2. $\lim_n a_{\varphi_1(n)} = \lim_n a_{\varphi_2(n)} = \cdots = \lim_n a_{\varphi_k(n)} = a.$

Então $a_n \xrightarrow[n]{} a.$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$, fixado de forma arbitrária.

$$\begin{array}{llll}
\lim_n a_{\varphi_1(n)} = a, & \text{logo} & \exists\, p_1 \in \mathbb{N}: & n \geq p_1 \Longrightarrow \left|a_{\varphi_1(n)} - a\right| < \varepsilon \\
\lim_n a_{\varphi_2(n)} = a, & \text{logo} & \exists\, p_2 \in \mathbb{N}: & n \geq p_2 \Longrightarrow \left|a_{\varphi_2(n)} - a\right| < \varepsilon \\
 & & \vdots & \\
\lim_n a_{\varphi_k(n)} = a, & \text{logo} & \exists\, p_k \in \mathbb{N}: & n \geq p_k \Longrightarrow \left|a_{\varphi_k(n)} - a\right| < \varepsilon
\end{array}$$

Tomando $p = \max\{\varphi_1(p_1), \varphi_2(p_2), \ldots, \varphi_k(p_k)\}$, para $n \geq p$, naturalmente que $n \in \varphi_i(\mathbb{N})$ para algum (não necessariamente único!) $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = \varphi_i(m)$.

Como $\varphi_i(m) = n \geq p \geq \varphi_i(p_i)$ e φ_i é estritamente crescente, tem-se $m \geq p_i$, logo $|a_n - a| = \left|a_{\varphi_i(m)} - a\right| < \varepsilon$, donde se conclui que $\lim_n a_n = a$. □

Teorema 2.38 *Toda a sucessão admite uma subsucessão monótona.*

Demonstração: Dada uma sucessão $(a_n)_n$ e dado $n_0 \in \mathbb{N}$, o termo a_{n_0} diz-se um **pico** da sucessão se $a_{n_0} > a_n, \forall\, n > n_0$.

Relativamente à sucessão $(a_n)_n$, ocorre uma das duas hipótese seguintes:

1. a sucessão $(a_n)_n$ tem uma infinidade de picos.
   Designando por $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ as ordens dos picos da sucessão $(a_n)_n$, tem-se $a_{n_1} > a_{n_2} > \ldots > a_{n_i} > \ldots$, logo $(a_{n_i})_i$ é uma subsucessão de $(a_n)_n$ monótona (estritamente) decrescente.

2. a sucessão $(a_n)_n$ não possui qualquer pico ou possui um número finito de picos.
   Tomando $k = 0$ no caso de $(a_n)_n$ não possuir qualquer pico ou, no caso de $(a_n)_n$ possuir um número finito de picos, designando k o maior índice desses picos, tome-se $n_1 = k + 1$. Como a_{n_1} não é um pico de $(a_n)_n$, existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Como a_{n_2} não é um pico de $(a_n)_n$, existe $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_2} \leq a_{n_3}$. Aplicando sucessivamente este raciocínio, construímos uma subsucessão $(a_{n_i})_i$ de $(a_n)_n$ tal que $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \ldots \leq a_{n_i} \leq \ldots$, isto é, uma subsucessão monótona crescente. □

Teorema 2.39 (de Bolzano-Weierstrass) *Toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente.*

Demonstração: Seja $(a_n)_n$ uma sucessão limitada. Pelo Teorema 2.38 a sucessão $(a_n)_n$ admite uma subsucessão monótona que, sendo limitada, pelo Teorema 2.27 é convergente.

□

2.1.3 Sucessões de Cauchy

Apresentámos até agora vários resultados relativos à convergência de sucessões. Na Proposição 2.29 concluiu-se que a sucessão $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ é convergente, sem se conhecer o seu limite, usando o facto de uma sucessão monótona limitada ser convergente.

Este método que permitiu concluir a convergência não é geral, uma vez que uma sucessão convergente não é necessariamente monótona.

A noção de sucessão de Cauchy oferece um critério de convergência geral, para sucessões reais, sem que se tenha de conhecer, à partida, o valor do limite da sucessão. Intuitivamente uma sucessão diz-se de Cauchy se os termos da sucessão estão, a partir de uma certa ordem, tão próximos uns dos outros quanto se pretenda.

Definição 2.40 *Uma sucessão $(a_n)_n$ diz-se* **sucessão de Cauchy** *se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq p \qquad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Nota 2.41 *A definição de sucessão de Cauchy é equivalente a:*

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m \geq p \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon;$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m > p \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon;$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m > p \Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon;$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m \geq p \Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon;$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n, k \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Longrightarrow |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$ ■

Exemplos 2.42

1. *A sucessão* $\left(1+\frac{1}{n}\right)_n$ *é uma sucessão de Cauchy.*

   Mostrar que uma sucessão é sucessão de Cauchy consiste em determinar, para cada $\varepsilon > 0$*, uma ordem* p *que verifica a condição* $\quad n,\, m \geq p \Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon$.
   Como
   $$|a_n - a_m| = \left|\left(1+\tfrac{1}{n}\right) - \left(1+\tfrac{1}{m}\right)\right| = \left|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}\right| < \max\left\{\tfrac{1}{n},\, \tfrac{1}{m}\right\},$$
   dado $\varepsilon > 0$*, tomando* $p = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$*, tem-se que*
   $$n, m \geq p \Longrightarrow |a_n - a_m| < \max\left\{\tfrac{1}{n},\, \tfrac{1}{m}\right\} \leq \tfrac{1}{p} < \varepsilon,$$
   logo $\left(1+\frac{1}{n}\right)_n$ *é sucessão de Cauchy.*

2. *A sucessão de termo geral* $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ *não é sucessão de Cauchy.*

   Mostrar que a sucessão $(a_n)_n$ *não é sucessão de Cauchy é verificar que*
   $$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \exists\, n,\, m \geq p \qquad |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$
   Observando que
   $$|a_{2n} - a_n| = \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{2n} > \underbrace{\tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} + \cdots + \tfrac{1}{2n}}_{n \text{ parcelas}} = \tfrac{1}{2}\,,$$
   tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$*, dado* $p \in \mathbb{N}$*, escolhendo* $n = p$ *e* $m = 2p$*, pode observar-se que* $n, m \geq p$ *e que* $|a_n - a_m| = a_{2p} - a_p > \frac{1}{2}$*, donde se conclui que* $(a_n)_n$ *não é sucessão de Cauchy.* ■

Proposição 2.43 *Toda a sucessão convergente é sucessão de Cauchy.*

Demonstração: Seja $(a_n)_n$ uma sucessão convergente para $a \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$,
$$\exists\, p \in \mathbb{N} \qquad n \geq p \Longrightarrow |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$
Então tomando $n,\, m \in \mathbb{N}$ tais que $n,\, m \geq p$, tem-se
$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

logo $(a_n)_n$ é sucessão de Cauchy. $\square$

Proposição 2.44 *Toda a sucessão de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$,

$$\exists\, p \in \mathbb{N} \qquad n,\, m \geq p \Longrightarrow |a_n - a_m| < 1.$$

Em particular, tomando $m = p$, tem-se que

$$n \geq p \Longrightarrow |a_n - a_p| < 1.$$

Como $|a_n| - |a_p| \leq |a_n - a_p|$, concluímos que para $n \geq p$ se tem $|a_n| < |a_p| + 1$.

Definindo $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{p-1}|, |a_p| + 1\}$, verifica-se que,

$$|a_n| \leq M,\, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

donde se conclui que $(a_n)_n$ é limitada. $\square$

Teorema 2.45 *Toda a sucessão de Cauchy que admite uma subsucessão convergente é convergente.*

Demonstração: Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de Cauchy e $\left(a_{\varphi(n)}\right)_n$ uma sua subsucessão convergente para $a \in \mathbb{R}$. Fixando $\varepsilon > 0$, como $(a_n)_n$ é sucessão de Cauchy,

$$\exists\, p_1 \in \mathbb{N} \qquad n, m \geq p_1 \Longrightarrow |a_n - a_m| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

e como $\lim\limits_n a_{\varphi(n)} = a$,

$$\exists\, p_2 \in \mathbb{N} \qquad n \geq p_2 \Longrightarrow |a_{\varphi(n)} - a| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $p = \max\{p_1, p_2\}$, para $n \geq p$ tem-se

$$|a_n - a| = |a_n - a_{\varphi(n)} + a_{\varphi(n)} - a| \leq |a_n - a_{\varphi(n)}| + |a_{\varphi(n)} - a| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde se conclui que $(a_n)_n$ converge para a. $\square$

Apresenta-se agora um teorema que fornece, para sucessões reais, uma forma equivalente à definição de convergência de uma sucessão, mas que não envolve o conhecimento do limite da sucessão.

Teorema 2.46 *Uma sucessão real $(a_n)_n$ é convergente se e só se é sucessão de Cauchy.*

Demonstração:

$\Longrightarrow$ Esta implicação é a Proposição 2.43.

$\Longleftarrow$ Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de Cauchy. Pelo Teorema 2.44, concluímos que $(a_n)_n$ é limitada, logo, pelo Teorema 2.39, $(a_n)_n$ admite uma subsucessão convergente. Mas então, pelo Teorema 2.45, $(a_n)_n$ é convergente. $\square$

Nota 2.47 *Na demonstração de que toda a sucessão de Cauchy é uma sucessão convergente é invocado o Teorema 2.45, cuja demonstração envolve o Teorema 2.27 onde é usado o Axioma da completude de $\mathbb{R}$ (ver introdução deste capítulo).* $\blacksquare$

2.1.4 Limites infinitos

Designámos anteriormente por sucessão divergente qualquer sucessão não convergente. Existem, no entanto, sucessões que, apesar de divergentes, apresentam uma certa regularidade no seu comportamento. É o caso de sucessões cujos termos se tornam arbitrariamente grandes e de sucessões em que esse comportamento se verifica para os simétricos dos seus termos.

Definição 2.48 *Diz-se que uma* **sucessão $(a_n)_n$ tende para $+\infty$** *(respectivamente $-\infty$) se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad a_n > M \qquad \text{(respectivamente } a_n < M\text{)}.$$

Escreve-se $\lim\limits_n a_n = +\infty$ ou $a_n \xrightarrow[n]{} +\infty$ (respectivamente $\lim\limits_n a_n = -\infty$ ou $a_n \xrightarrow[n]{} -\infty$).

Exemplo 2.49 *A sucessão $\left(n^2\right)_n$ tende para $+\infty$.*

De facto, dado $M \in \mathbb{R}$, se $n, p \in \mathbb{N}$ são tais que $p \leq n$, então $a_n = n^2 \geq p^2$. Se escolhermos $p = \left[\sqrt{|M|}\right] + 1$, verifica-se que

$$n \geq p \Longrightarrow a_n = n^2 \geq p^2 > |M| \geq M.$$

■

Observe-se que, apesar de aceitarmos a existência de sucessões cujos limites são $+\infty$ ou $-\infty$, de acordo com a Definição 2.48, nenhuma concessão é feita à noção de convergência; uma vez que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, as sucessões cujo limite é $+\infty$ ou $-\infty$ são sucessões divergentes.

No cálculo de limites de sucessões, usamos com frequência uma *aritmética de limites* para obter limites de sucessões que são definidas como soma, produto ou quociente de outras sucessões. A Proposição 2.20 apresenta alguns resultados desse tipo, quando as sucessões envolvidas são convergentes, isto é, possuem limites *finitos*. Podemos procurar estender esses resultados ao caso em que o limite existe, sendo finito ou infinito. A proposição seguinte fornece, a título de exemplo, algumas "regras" dessa *aritmética de limites*.

Proposição 2.50

1. *Se $(a_n)_n$ é uma sucessão tal que $a_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então $\lim_n a_n = 0$ se e só se $\lim_n \dfrac{1}{|a_n|} = +\infty$.*
2. *Dadas sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$, se $\lim_n a_n = +\infty$ e $\lim_n b_n = b$, onde b representa um número real ou $+\infty$, então $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$.*

Demonstração:

1. Suponhamos que $\lim_n a_n = 0$. Dado $M > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Longrightarrow |a_n| < \frac{1}{M}\,,$$

logo

$$n \geq p \Longrightarrow \frac{1}{|a_n|} > M\,,$$

donde se conclui que $\frac{1}{|a_n|} \xrightarrow[n]{} +\infty$.

Reciprocamente, se $\lim_n \frac{1}{|a_n|} = +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Longrightarrow \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon}\,,$$

ou seja

$$n \geq p \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon\,,$$

logo $\lim_n a_n = 0$.

2. Se $\lim_n b_n = b$, onde b representa um número real ou mais infinito, a sucessão $(b_n)_n$ é minorada, isto é,

$$\exists\, M_1 \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad b_n \geq M_1.$$

Dado $M \in \mathbb{R}$, como $a_n \xrightarrow[n]{} +\infty$,

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \qquad a_n > M - M_1\,,$$

logo, para $n \geq p$ tem-se $a_n + b_n > (M - M_1) + M_1 = M$, donde se conclui que $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$. □

Nota 2.51 *Existem situações em que não há uma regra que permita determinar o limite de uma sucessão à custa dos limites de sucessões que a compõem. Como exemplo dessa situação, supondo que $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são sucessões tais que $\lim_n a_n = +\infty$ e $\lim_n b_n = -\infty$, nada se pode concluir a respeito de $\lim_n (a_n + b_n)$. Com efeito, dependendo das sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$, pode acontecer que $(a_n + b_n)_n$ seja uma sucessão convergente, tenha limite $+\infty$, $-\infty$ ou o limite simplesmente não exista (ver Exemplo 2.52). Nestes casos em que não é possível definir uma regra, diz-se que estamos perante uma* **indeterminação**.

Dada uma sucessão, o seu limite nunca é indeterminado; o que pode acontecer é não sabermos o limite dessa sucessão e, ao tentar obter um valor para o limite que desconhecemos, trabalhando a sucessão por forma a podermos aplicar algum resultado sobre limites, se nos depare uma situação de indeterminação. Para "levantar a indeterminação", isto é, para se conseguir determinar o limite da sucessão, são frequentemente necessárias muita perseverança e alguma imaginação.

Em anexo, na página 220, encontra-se uma tabela onde se apresenta uma listagem de regras que definem aquilo que designamos por aritmética de limites envolvendo limites infinitos. ■

Exemplos 2.52 *Considerando sucessões* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *cujos limites são, respectivamente* $+\infty$ *e* $-\infty$*, analisemos, em cada caso, o* $\lim_n (a_n + b_n)$*:*

- $a_n = n+1,\ b_n = -n+1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$*; tem-se que* $\lim_n a_n = +\infty$*,* $\lim_n b_n = -\infty$ *e* $\lim_n (a_n + b_n) = 2$*;*
- $a_n = n^2,\ b_n = -n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$*; tem-se que* $\lim_n a_n = +\infty$*,* $\lim_n b_n = -\infty$ *e* $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$*;*
- $a_n = n,\ b_n = -n^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$*; tem-se que* $\lim_n a_n = +\infty$*,* $\lim_n b_n = -\infty$ *e* $\lim_n (a_n + b_n) = -\infty$*;*
- $a_n = n + (-1)^n,\ b_n = -n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$*; tem-se que* $\lim_n a_n = +\infty$*,* $\lim_n b_n = -\infty$*, mas não existe* $\lim_n (a_n + b_n)$*.* ■

Nota 2.53 *Encerramos esta secção com uma observação: os termos iniciais de uma sucessão não condicionam o "comportamento" da sucessão no limite, isto é, se alterarmos um número finito de termos de uma sucessão nada se altera quanto à existência ou não de limite e, no caso de existir limite, o seu valor permanece o mesmo.*

Assim sendo, os resultados enunciados nesta secção em que se exige que uma condição deve ser verificada por todos os termos da sucessão, podem ser adaptados, passando a exigir-se a verificação dessa condição apenas pelos termos a partir de uma certa ordem. ■

2.2 Séries

Nesta secção estendemos a noção de soma a um número infinito de parcelas, introduzindo para esse efeito a noção de série real. Apresentamos alguns critérios que nos ajudarão a estudar a convergência de séries.

Definição 2.54 *Dada uma sucessão real* $(a_n)_n$*, chama-se* **série real** *ao par de sucessões* $((a_n)_n, (s_n)_n)$ *tais que* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$*, para todo o* $n \in \mathbb{N}$*.*

- $(a_n)_n$ *diz-se a* **sucessão geradora** *da série.*

- $(s_n)_n$ *diz-se a* **sucessão das somas parciais** *da série.*

Chamamos termo de ordem n *de uma série ao termo* a_n *da sucessão geradora.*

Nota 2.55 *Para conhecer uma série* $((a_n)_n, (s_n)_n)$*:*

- *basta conhecer a sucessão geradora* $(a_n)_n$*, pois* $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$*;*

- *basta conhecer a sucessão das somas parciais, pois*

$$\begin{cases} a_1 = s_1, \\ a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \textit{se} \ \ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$ ■

Definição 2.56 *A* **série** *gerada por uma sucessão* $(a_n)_n$ *diz-se* **convergente** *se a sucessão das somas parciais,* $(s_n)_n$*, convergir. Nesse caso, a* $S = \lim\limits_{n} s_n$ *chama-se* **soma da série** *e representa-se* $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uma **série** *não convergente diz-se* **divergente**.

Nota 2.57

1. *Por abuso de notação, escreveremos* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ou* $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ *para designar a série gerada por* $(a_n)_n$*, quer se trate de uma série convergente ou de uma série divergente;*

2. *Frequentemente, por conveniência, consideramos séries em que a sucessão geradora tem domínio* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *ou domínio* $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$*, sendo* $n_0 \in \mathbb{N}$*. Escrevemos então* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ou* $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *ou* $\displaystyle\sum_{n \geq n_0} a_n$. ■

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.58 *A série* $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ *é designada por* **série harmónica**. *Podemos verificar facilmente que esta série é divergente: dado* $n \in \mathbb{N}$*, seja* $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$*. Foi visto na secção anterior (Exemplo 2.42) que* $(s_n)_n$ *não é uma sucessão de Cauchy. Então, pelo Teorema 2.46,* $(s_n)_n$ *é uma sucessão divergente, ou seja,* $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ *é uma série divergente.* ■

Exemplo 2.59 *Dados a e $r \in \mathbb{R}$, chamamos* **série geométrica de razão r e primeiro termo a** *à série* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a\,r^n$. ■

Exemplo 2.60 *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão. À série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ *chamamos* **série telescópica associada à sucessão** $(a_n)_n$. ■

Proposição 2.61 *Uma série telescópica $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ é convergente se e só se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente.*

Se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente então $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_n a_n - a_1$.

Demonstração: Facilmente se verifica por indução que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_{n+1} - a_1$, pelo que $(s_n)_n$ converge se e só se $(a_{n+1})_n$ converge ou, equivalentemente, se $(a_n)_n$ converge. Além disso, quando $(a_n)_n$ é convergente, a soma da série é $S = \lim_n s_n = \lim_n a_{n+1} - a_1 = \lim_n a_n - a_1$. □

Exemplo 2.62 *A série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)}$ *é convergente e tem soma* 1.

Note-se que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right).$$

Então, se definirmos $a_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, esta série é uma série telescópica. Como $\lim_n a_n = 0$, temos que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_n a_n - a_1 = 1.$$

■

Proposição 2.63 *Sejam $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ duas séries convergentes, de soma S e T, respectivamente e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a_n + b_n\right)_n$ *é uma série convergente de soma $S+T$;*

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\lambda a_n\right)_n$ *é uma série convergente de soma* λS.

Demonstração: A demonstração é deixada como exercício. $\square$

Definição 2.64 *Duas* **séries** $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *e* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *dizem-se* **da mesma natureza** *se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.*

Proposição 2.65 *Sejam* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *duas sucessões tais que* $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$ *é finito. Então* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *e* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *são da mesma natureza.*

Demonstração: Sejam $(s_n)_n$ a sucessão das somas parciais de $(a_n)_n$ e $(t_n)_n$ a sucessão das somas parciais de $(b_n)_n$.

Seja $X = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$. Se $X = \emptyset$, tome-se $p = 0$. Caso contrário, seja $p = \max X$. Dado $n > p$, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{j\in X}(a_j - b_j).$$

Se denotarmos $\sum_{j\in X}(a_j - b_j) = A$, verificamos que

$$n > p \Longrightarrow s_n = t_n + A,$$

pelo que as sucessões $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes. $\square$

Proposição 2.66 *Sejam* $a,\, r \in \mathbb{R}$ *e considere-se a série geométrica,* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a\, r^n$. *Então esta série:*

1. *é convergente se* $a = 0$ *ou se* $|r| < 1$, *e a sua soma é* $\dfrac{a}{1-r}$;
2. *é divergente se* $a \neq 0$ *e* $|r| \geq 1$.

Demonstração: A sucessão das somas parciais desta série é

$$\begin{cases} s_0 = a, \\ s_n = a\left(1 + r + \cdots + r^n\right), \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Note-se que $rs_n = a(r + \cdots + r^n + r^{n+1})$. Então

$$(1-r)s_n = s_n - r\,s_n = a\big((1 + r + \cdots + r^n + r^{n+1}) - (r + \cdots + r^n)\big) = a(1 - r^{n+1}),$$

pelo que

$$s_n = a\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \text{se } r \neq 1, \qquad \text{ou} \qquad s_n = a(n+1), \quad \text{se } r = 1.$$

Vejamos agora que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ar^n$:

- converge, se $a = 0$;

  Este facto é trivial, uma vez que, se $a = 0$, então $s_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$;

- converge se $|r| < 1$;

  De facto, $s_n = a\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \xrightarrow[n]{} \frac{a}{1-r}$. Então a série é convergente e tem soma $\dfrac{a}{1-r}$.

- diverge se $a \neq 0$ e $|r| \geq 1$.

  Recorrendo, se necessário, ao Exercício resolvido 2.3 para calcular $\lim\limits_n r^{n+1}$, verifica-se que a sucessão das somas parciais, $s_n = a\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $n \in \mathbb{N}_0$, é divergente, se $r \notin\,]-1,1]$. Se $r = 1$, $s_n = a(n+1)$, logo $(s_n)_n$ é também divergente. $\square$

Essencialmente, o estudo das séries permite-nos estender a operação soma a um número infinito de parcelas. Muitas vezes é importante sabermos se uma determinada soma existe, é finita ou infinita, não sendo relevante o valor exacto dessa soma. Vamos, por isso, estudar critérios que nos permitirão decidir, em alguns casos, se uma dada série é convergente ou divergente, sem precisarmos de calcular a sua soma[3].

[3] O Teorema 2.46 já nos permite determinar a natureza de uma série sem conhecer a sua soma. Com efeito, uma série é convergente se e só se a sucessão das somas parciais for sucessão de Cauchy. Os critérios que iremos apresentar baseiam-se em propriedades da sucessão geradora da série em vez de propriedades da sucessão das somas parciais.

Teorema 2.67 *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão real. Se a série gerada por $(a_n)_n$ converge, então $(a_n)_n$ converge para zero.*

Demonstração: Se $(s_n)_n$ denotar a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, sabemos que $(s_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy, por ser uma sucessão convergente (ver Teorema 2.46). Então

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \qquad |s_{n+1} - s_n| < \varepsilon,$$

pelo que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \qquad |a_{n+1}| < \varepsilon,$$

que é equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n > p \qquad |a_n| < \varepsilon,$$

estabelecendo-se assim a convergência de $(a_n)_n$ para zero. □

Exemplo 2.68 *A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ é divergente.*

A sucessão geradora desta série é $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Como $\lim_n a_n = \frac{1}{e} \neq 0$ (ver Exercício resolvido 2.4), pelo teorema anterior podemos imediatamente afirmar que a série é divergente. ■

Definição 2.69 *A uma série do tipo $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} a_n$, em que $(a_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos, chamamos* **série alternada**.

Teorema 2.70 (critério de Leibniz) *Seja $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n a_n$ uma série alternada tal que:*

1. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é decrescente;*

2. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge para zero.*

Então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n a_n$ é convergente.

Demonstração: Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a sucessão das somas parciais de $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(-1)^n a_n$. Então

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0,\\
s_1 &= a_0 - a_1,\\
s_2 &= a_0 - (a_1 - a_2),\\
s_3 &= (a_0 - a_1) - (a_2 - a_3),\\
s_4 &= a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Mais geralmente, $s_0 = a_0$ e, se $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k}),\\
s_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-2} - a_{2k-1}).
\end{aligned}$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é decrescente, facilmente se verifica então que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad s_{2n} \leq a_0 \qquad \text{e} \qquad s_{2n+1} \geq 0.$$

Como, dado $n \in \mathbb{N}$, $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1}$ e $s_{2n-1} = s_{2n-2} - a_{2n-1} \leq s_{2n-2}$, conclui-se que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad 0 \leq s_{2n} \leq a_0 \qquad \text{e} \qquad 0 \leq s_{2n+1} \leq a_0.$$

Temos então que a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é minorada por zero e majorada por a_0.

Observe-se que as subsucessões $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ são, respectivamente, decrescente e crescente, uma vez que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad s_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n}$$

e

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad s_{2n+3} = s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq s_{2n+1}.$$

Então ambas as subsucessões são convergentes (ver Proposição 2.27). Além disso, como, para todo o número natural n se tem que $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n}$ e $\lim_n a_n = 0$, temos que $\lim_n s_{2n-1} = \lim_n s_{2n} - \lim_n a_{2n} = \lim_n s_{2n}$.

Assim, pela Proposição 2.37, concluímos que $(s_n)_n$ é convergente. □

Nota 2.71

1. *Observe que* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}a_n = -\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$.
2. *O critério de Leibniz estabelece uma condição suficiente, mas não necessária, para a convergência de séries alternadas.* ■

Exemplo 2.72 *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sucessão definida do seguinte modo:*

$$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{16},\ \ldots\right).$$

A sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é decrescente mas pode facilmente verificar-se que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ é convergente e tem soma 1. ■

Exemplo 2.73 *A* **série harmónica alternada** $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{1}{n}$ *é convergente.*

A sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ é decrescente e convergente para zero. Então, aplicando o critério de Leibniz, concluímos que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{1}{n}$ é convergente. ■

Teorema 2.74 *A série gerada por uma sucessão de termos não negativos* $(a_n)_n$ *é convergente se e só se a sucessão das somas parciais* $(s_n)_n$ *for majorada.*

Demonstração: Como $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n\geq 0$, $(s_n)_n$ é uma sucessão crescente. Então, pelo Teorema 2.27 e pela Proposição 2.18,

$$(s_n)_n \text{ convergente} \Longleftrightarrow (s_n)_n \text{ limitada.}$$ □

Definição 2.75 *Uma* **série** $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *diz-se* **absolutamente convergente** *se a série gerada pela sucessão dos módulos,* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$*, for convergente.*

Teorema 2.76 *Se a série gerada por* $(a_n)_n$ *for absolutamente convergente então é convergente. Além disso,*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\,.$$

Demonstração: Sejam $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ e $t_n = \sum_{j=1}^{n} |a_j|$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, tem-se que $|s_n - s_m| \leq |t_n - t_m|$. Uma vez que $(t_n)_n$, por ser uma sucessão convergente, é sucessão de Cauchy, a desigualdade acima garante-nos que $(s_n)_n$ é também uma sucessão de Cauchy e, consequentemente, pelo Teorema 2.46, convergente.

Além disso, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n$, pelo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_n s_n \leq \lim_n t_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \qquad \square$$

O recíproco do teorema anterior é falso visto que, por exemplo, a série harmónica alternada é convergente (ver Exemplo 2.73) mas não é absolutamente convergente (ver Exemplo 2.58).

De seguida iremos apresentar alguns critérios de convergência para séries de termos não negativos. Estes critérios, utilizados em conjunto com resultados conhecidos sobre a convergência de séries, permitem analisar a natureza de séries cujos termos são não positivos. Com efeito, se $(a_n)_n$ é uma sucessão de termos não positivos, pelo ponto 2. da Proposição 2.63, a natureza das séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} -a_n$ é a mesma, logo, a conclusão da aplicação de algum dos critérios de convergência à série gerada por $(-a_n)_n$ (série de termos não negativos) é válida para a série gerada por $(a_n)_n$.

Podemos também concluir que a série gerada por uma sucessão $(a_n)_n$ é convergente concluindo que é convergente a série gerada pela sucessão de termos não negativos $(|a_n|)_n$; nesse caso, sendo $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ uma série absolutamente convergente, o Teorema 2.76 garante que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente.

Teorema 2.77 (primeiro critério de comparação) *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões de termos não negativos tais que*

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad a_n \leq b_n. \tag{2.5}$$

Se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ é convergente então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ também é convergente.

Demonstração: Designando $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ as sucessões das somas parciais das séries geradas respectivamente por $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$, é imediato reconhecer que, dado $n \geq p$, se tem que $s_n \leq t_n - t_p + s_p$. Sendo $(t_n)_n$ uma sucessão convergente, é majorada, por isso $(s_n)_n$ é também uma sucessão majorada. Pelo Teorema 2.74 a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente. □

Nota 2.78 *O primeiro critério de comparação pode, equivalentemente, ser enunciado da seguinte forma: dados $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões de termos não negativos verificando (2.5), se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente, é também divergente a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$.* ■

Observação: Do que foi dito anteriormente não conclua que duas séries de termos não negativos que verificam a condição (2.5) são da mesma natureza!

Exemplos 2.79

1. *Se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são sucessões de termos não negativos e $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)$ é divergente.*
   Observando que $a_n \leq a_n + b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, como, por hipótese, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente, a conclusão de que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)$ é divergente decorre da aplicação do primeiro critério de comparação.

2. *Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é uma série absolutamente convergente, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ é também absolutamente convergente. Como $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente, $a_n \xrightarrow[n]{} 0$, logo*

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad |a_n| \leq 1.$$

Tem-se assim que $a_n^2 = |a_n^2| \leq |a_n|$*, para* $n \geq p$*. O primeiro critério de comparação permite concluir que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ *é (absolutamente) convergente.* ■

Teorema 2.80 (segundo critério de comparação) *Sejam* $(a_n)_n$ *uma sucessão de termos não negativos e* $(b_n)_n$ *uma sucessão de termos positivos tais que existe* $\lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = \alpha$*.*

1. *Se* $\alpha \in \mathbb{R}^+$*,* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *e* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *são séries da mesma natureza.*
2. *Se* $\alpha = 0$*, a convergência de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *implica a convergência de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$*.*
3. *Se* $\alpha = +\infty$*, a convergência de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *implica a convergência de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$*.*

Demonstração:

1. Como $\lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = \alpha$, onde α é um número real positivo,

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3\alpha}{2},$$

   isto é, para $n \geq p$, $\quad \frac{\alpha}{2}\, b_n \leq a_n \leq \frac{3\alpha}{2}\, b_n$.

   Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge então $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3\alpha}{2}\, b_n$ também converge (ponto 2. da Proposição 2.63). Aplicando o primeiro critério de comparação, concluímos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente.

   Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergir então, pelo primeiro critério de comparação, concluímos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\alpha}{2}\, b_n$ é convergente logo, pelo ponto 2. da Proposição 2.63, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge.

2. Se $\alpha = 0$, então existe uma ordem, a partir da qual, $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, isto é, uma ordem, a partir da qual, $a_n \leq b_n$ e a conclusão decorre da aplicação do primeiro critério de comparação.

3. Se $\alpha = +\infty$, então existe uma ordem, a partir da qual, $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, isto é, uma ordem, a partir de qual, $b_n \leq a_n$ e a conclusão decorre da aplicação do primeiro critério de comparação. □

Nota 2.81 *Dada uma série de termos não negativos, a estratégia de aplicação dos critérios de comparação varia consoante se pretende mostrar que a série é convergente ou divergente:*

- *no caso de se pretender mostrar que a série é convergente, tem de ser comparada com uma série convergente de termos não negativos;*
- *no caso de se pretender concluir que se trata de uma série divergente, a comparação terá de ser feita com uma série divergente, de termos não negativos.*

Torna-se evidente a necessidade de ter à disposição uma "bolsa" de séries cuja natureza seja conhecida. É nesse sentido que é apresentada a seguinte família de séries. ■

Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, as séries do tipo $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ são chamadas **séries de Riemann**. As séries de Riemann são assim chamadas devido à função ζ de Riemann, função de variável complexa definida por $\displaystyle\zeta(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^z}$. Na literatura, as séries de Riemann são frequentemente chamadas séries de Dirichlet.

O conceito de potência de expoente irracional só será apresentada na secção 4.2; apesar disso, pensamos que o aluno já possui uma noção intuitiva suficiente para a utilização aqui efectuada.

Teorema 2.82 *As séries de Riemann* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ *são divergentes se* $0 < \alpha \leq 1$ *e são convergentes se* $\alpha > 1$.

Demonstração: A série de Riemann que se obtém quanto se toma $\alpha = 1$ é a série harmónica, de que já falamos no Exemplo 2.58 e onde se concluiu tratar-se de uma série divergente.

Para $0 < \alpha \leq 1$, como $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, o primeiro critério de comparação permite concluir que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ é divergente.

Suponhamos agora que $\alpha > 1$ e designemos por $(s_n)_n$ a sucessão das somas parciais da série de Riemann associada ao valor α considerado. Designando $a_n = 2^{n+1} - 1$, para $n \in \mathbb{N}$, é simples verificar que $a_n > n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e por isso tem-se que $s_n < s_{a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observe-se que o termo s_{a_n} pode ser escrito, associando para cada $p \in \mathbb{N}$ as parcelas desde a de ordem 2^p até à de ordem $2^{p+1}-1$, da seguinte forma

$$s_{a_n} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)}_{<\,2\frac{1}{2^\alpha}\,=\,\frac{1}{2^{\alpha-1}}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^p)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha}\right)}_{<\,(2^{p+1}-2^p)\frac{1}{(2^p)^\alpha}\,=\,\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^n)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right)}_{<\,(2^{n+1}-2^n)\frac{1}{(2^n)^\alpha}\,=\,\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n},$$

onde as majorações assinaladas se obtêm substituindo as parcelas agrupadas pela maior delas. Tem-se então que

$$s_{a_n} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

O segundo membro da desigualdade anterior corresponde ao termo de ordem n da sucessão das somas parciais da série geométrica de razão $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, que é convergente visto que $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ (ver Proposição 2.66) pois, por hipótese, $\alpha > 1$.

Temos assim que $(s_n)_n$ é uma sucessão crescente e majorada, logo, pelo Teorema 2.27, convergente. □

Exemplos 2.83

1. *A série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^3-2n}$ *é convergente.*

   Com efeito,
   $$\frac{1}{n^3-2n} = \frac{1}{n^2\left(n-\frac{2}{n}\right)} \le \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, n > 1.$$
   Como $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, por comparação conclui-se a convergência de* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^3-2n}$.

2. *A série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ *é divergente.*

   Verificando que
   $$\lim_n \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}} = \lim_n \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n^2}}} = 1,$$
   pelo segundo critério de comparação concluímos que a série dada é da mesma natureza da série gerada por $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)_n$. *Tratando-se esta última de uma série de Riemann cujo expoente é menor do que 1, qualquer uma das séries é divergente.* ■

Teorema 2.84 (critério de Cauchy) *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos.*

1. *Se $\exists\, r \in [0,1[\ \exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \quad a_n \leq r^n$, então a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente.*

2. *Se $\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \quad a_n \geq 1$, então a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente.*

Demonstração:

1. Como $0 \leq r < 1$, a série geométrica $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r^n$ é convergente, logo, por comparação, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente.

2. Basta observar que $(a_n)_n$ não converge para zero. $\square$

Corolário 2.85 *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos tal que $\lim\limits_n \sqrt[n]{a_n} = \alpha$.*

1. *Se $\alpha < 1$, então $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente.*

2. *Se $\alpha > 1$, então $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente.*

Demonstração:

1. Considerando $r = \frac{\alpha+1}{2}$, tem-se que $\alpha < r < 1$ e, como $\lim\limits_n \sqrt[n]{a_n} = \alpha$,

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad \sqrt[n]{a_n} \leq r.$$

   Então, para $n \geq p$, $a_n \leq r^n$, donde a convergência de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ resulta da aplicação do critério de Cauchy.

2. Se $\alpha > 1$ então

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad a_n \geq 1,$$

   o que implica que $(a_n)_n$ não converge para zero, logo $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge. $\square$

Nota 2.86 *A reformulação do critério de Cauchy apresentada no corolário anterior, leva a que o critério de Cauchy seja frequentemente designado por critério da raiz.* ■

Exemplo 2.87 *A série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *é convergente.*

Aplicando o critério de Cauchy e usando no cálculo do limite a Proposição 2.29 e a Definição 2.30, tem-se

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

logo a série é convergente. ■

Teorema 2.88 (critério de d'Alembert) *Seja* $(a_n)_n$ *uma sucessão de termos positivos.*

1. *Se* $\exists\, r < 1\ \exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, *então* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é convergente.*

2. *Se* $\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *então* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é divergente.*

Demonstração:

1. Para $n \geq p$ tem-se que

$$\frac{a_n}{a_p} = \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{p+1}}{a_p} \leq r^{n-p}$$

logo, para $n \geq p$, tem-se $a_n \leq \frac{a_p}{r^p}\, r^n$. Como a série geométrica $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ é convergente, pela Proposição 2.63, é também convergente a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_p}{r^p}\, r^n$ logo, por comparação, concluímos a convergência de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

2. A sucessão $(a_n)_n$, sendo uma sucessão de termos positivos e crescente a partir da ordem p, naturalmente que não é uma sucessão convergente para zero logo a série gerada por $(a_n)_n$ é divergente. □

Corolário 2.89 *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos tal que* $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$.

1. *Se $\alpha < 1$, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente.*
2. *Se $\alpha > 1$, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente.*

Demonstração:

1. Tomando $r = \frac{\alpha+1}{2}$, como $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que
$$n \geq p \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1$$
logo, pelo critério de d'Alembert, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge.

2. Se $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha > 1$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que
$$n \geq p \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$
logo o critério de d'Alembert permite concluir que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente. □

Nota 2.90 *A formulação do critério de d'Alembert apresentada no Corolário anterior justifica porque é vulgar referir o critério de d'Alembert como critério da razão ou do quociente.*

■

Exemplo 2.91 *A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n!}$ é convergente.*

Observando que
$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$
concluímos, pelo critério de d'Alembert, que se trata de uma série convergente. ■

Nota 2.92 *Os critérios de Cauchy e de d'Alembert nada dizem sobre a natureza da série gerada por uma sucessão $(a_n)_n$ de termos positivos quando $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ou $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$.*

■

Exemplos 2.93 *Considerando* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *e* $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, *tem-se que*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_n \sqrt[n]{b_n} = 1.$$

No entanto a série gerada por $(a_n)_n$ *é divergente, enquanto que a série gerada por* $(b_n)_n$ *é convergente.* ■

Os resultados que apresentamos de seguida respondem ao problema seguinte: será que a comutatividade da adição se generaliza ao caso em que existe uma infinidade de parcelas? A pergunta anterior pode ser formulada do seguinte modo: reordenando os termos de uma série obtemos uma série da mesma natureza? Para além disso, quando uma série é convergente e a reordenação dos seus termos origina uma série também convergente, será que têm ambas a mesma soma? Comecemos por analisar um exemplo.

Exemplo 2.94 *Considere-se a sucessão* $(a_n)_n$*, cujo termo geral é* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$*. A série gerada por* $(a_n)_n$*, série harmónica alternada, é convergente. Designemos por* S *a sua soma*[4]*, isto é,*

$$S = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \dots \tag{2.6}$$

Pela Proposição 2.63, tem-se que a série gerada por $(b_n)_n = \left(\frac{1}{2}a_n\right)_n$ *é convergente e a sua soma é* $\frac{S}{2}$*. Tem-se assim que*

$$\frac{S}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \dots$$

Considerando agora a sucessão $(c_n)_n$ *cujo termo geral é*

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ b_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

a série gerada por $(c_n)_n$ *é convergente e a sua soma é* $\frac{S}{2}$*. De facto, designando por* $(B_n)_n$ *e* $(C_n)_n$ *as sucessões das somas parciais das séries geradas por, respecticamente,* $(b_n)_n$ *e*

[4] Mais tarde, na unidade curricular de Cálculo II, verá que $S = -\log 2$.

$(c_n)_n$, tem-se que $C_{2n} = C_{2n+1} = B_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, logo, pela Proposição 2.37, conclui-se que $C_n \xrightarrow[n]{} \frac{S}{2}$.

$$\frac{S}{2} = 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{8} + \dots \tag{2.7}$$

De novo pela Proposição 2.63, a série gerada pela sucessão $(a_n + c_n)_n$ é convergente e a sua soma é $\frac{3S}{2}$, ou seja, usando (2.6) e (2.7), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{3S}{2} &= -1 + 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + 0 - \frac{1}{11} + \frac{1}{6} - \dots \\ &= -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{6} - \dots \end{aligned}$$

Observamos assim que os termos da série gerada pela subsucessão que resulta de $(a_n + c_n)_n$ pela eliminação dos termos nulos, cuja soma é $\frac{3S}{2}$, são exactamente os mesmos, apesar de dispostos por ordem diferente, da série gerada por $(a_n)_n$, cuja soma é S.

Concluímos então que reordenando os termos de uma série convergente podemos alterar o valor da sua soma. ■

Note-se que no exemplo anterior usámos a série harmónica alternada que é convergente mas não é absolutamente convergente. O teorema seguinte justifica a escolha efectuada.

Teorema 2.95 *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão real e $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma bijecção. Se a série gerada por $(a_n)_n$ é absolutamente convergente, então a série gerada por $\left(a_{f(n)}\right)_n$ é absolutamente convergente e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{f(n)}$*

Demonstração: Sejam $r_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ e $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{f(k)}$, com $n \in \mathbb{N}$, $R = \lim\limits_n r_n$ e $S = \lim\limits_n s_n$.

Como se tem que

$$\sum_{k=1}^{n} \left|a_{f(k)}\right| \leq R,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

a sucessão das somas parciais da série gerada por $\left(\left|a_{f(n)}\right|\right)_n$ é crescente e majorada, logo é convergente (é simples concluir que a soma da série gerada por $\left(\left|a_{f(n)}\right|\right)_n$ é R), ou seja $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{f(n)}$ é absolutamente convergente.

Vejamos que $S = \lim_n t_n$ mostrando que $\lim_n (s_n - t_n) = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$. As sucessões $(r_n)_n$, $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ são sucessões de Cauchy, logo

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq m \geq p \qquad |r_n - r_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |t_n - t_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando $q = \max f^{-1}(\{1, \ldots, p\})$ e designando $k = \max\{f(1), \ldots, f(q)\}$, é simples verificar que $q \geq p$ e $k \geq p$. Observe-se que

$$|t_q - s_p| = \left|a_{f(1)} + \cdots + a_{f(q)} - (a_1 + \cdots + a_p)\right| \leq |r_k - r_p| < \frac{\varepsilon}{3},$$

uma vez que $\{a_1, \ldots, a_p\} \subseteq \left\{a_{f(1)}, \ldots, a_{f(q)}\right\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_k\}$.

Considerando $n \geq p$ tem-se então

$$|s_n - t_n| = |(s_n - s_p) + (s_p - t_q) + (t_q - t_n)| \leq |s_n - s_p| + |s_p - t_q| + |t_q - t_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

logo $\lim_n (s_n - t_n) = 0$, ou seja $\lim_n t_n = \lim_n s_n = S$.

Concluímos assim que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{f(n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = S$. □

O teorema anterior garante que qualquer reordenação dos termos de uma série absolutamente convergente origina uma série também absolutamente convergente cuja soma é a mesma da série original. O teorema seguinte, que iremos apresentar sem demonstração, diz que dada uma série convergente mas não absolutamente convergente, é possível, reordenando os seus termos, obter uma série divergente ou uma série convergente cuja soma é o valor que se pretenda.

Teorema 2.96 (de Riemann) *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é convergente mas não absolutamente convergente. Então:*

1. *$\forall\, S \in \mathbb{R}\ \exists\, f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijectiva tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{f(n)} = S$;*

2. *$\exists\, f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijectiva tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{f(n)}$ é divergente.* □

2.3 Exercícios resolvidos

Exercício resolvido 2.1 Mostre, pela definição, que $\lim\limits_n \dfrac{n^2+n-2}{2\,n^2-n-3} = \dfrac{1}{2}$.

Resolução: Seja $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+n-2}{2\,n^2-n-3} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{3\,n-1}{4\,n^2-2\,n-6}\right| \\
&= \frac{3\,n-1}{2\,|2\,n-3|\,(n+1)} \\
&< \frac{3\,n+3}{2\,|2\,n-3|\,(n+1)} \\
&= \frac{3}{2\,|2\,n-3|} \\
&\leq \frac{3}{2n}\,, \quad \text{se } n \geq 3 \\
&\leq \varepsilon\,, \quad \text{se } n \geq \frac{3}{2\,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Então, tomando $p = \max\{3, \left[\frac{3}{2\,\varepsilon}\right] + 1\}$, tem-se que

$$n \geq p \Longrightarrow \left|\frac{n^2+n-2}{2\,n^2-n-3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

o que prova que $\lim\limits_n \dfrac{n^2+n-2}{2\,n^2-n-3} = \dfrac{1}{2}$. ■

Exercício resolvido 2.2 Mostre, pela definição, que a sucessão $(\sqrt{n})_n$ não é uma sucessão de Cauchy.

Resolução:

A sucessão $(\sqrt{n})_n$ não é sucessão de Cauchy se e só se, por definição,

$$\exists\,\varepsilon > 0\ \forall\,p \in \mathbb{N}\ \exists\,n, m \geq p \qquad \left|\sqrt{n} - \sqrt{m}\right| \geq \varepsilon,$$

Neste caso, o valor de ε pode ser qualquer, isto é, verifica-se que

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \forall\,p \in \mathbb{N}\ \exists\,n, m \geq p \qquad \left|\sqrt{n} - \sqrt{m}\right| \geq \varepsilon.$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathbb{N}$. Tomando $n = p$ e $m = [\varepsilon + 2]^2 p$, tem-se que

$$\left|\sqrt{n} - \sqrt{m}\right| = \left|\sqrt{p} - \sqrt{[\varepsilon + 2]^2 p}\right| = ([\varepsilon + 2] - 1)\sqrt{p} > \varepsilon,$$

donde podemos concluir que a sucessão $(\sqrt{n})_n$ não é sucessão de Cauchy. ∎

Exercício resolvido 2.3 Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que:

1. se $a > 1$ então $\lim\limits_n a^n = +\infty$;
2. se $a = 1$ então $\lim\limits_n a^n = 1$;
3. se $|a| < 1$ então $\lim\limits_n a^n = 0$;
4. se $a \leq -1$ então $\lim\limits_n a^n$ não existe.

Resolução:

1. Escrevendo $a = 1 + h$, onde $h = a - 1 > 0$, tem-se que

$$a^n = (1 + h)^n = 1 + nh + \cdots + h^n \geq 1 + nh > nh, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Como $nh \xrightarrow[n]{} +\infty$, visto que $h > 0$, conclui-se que $a^n \xrightarrow[n]{} +\infty$.
2. Este caso é imediato, visto que se trata da sucessão constante igual a um.
3. Se $a = 0$, então a sucessão é constante igual a zero, logo convergente para zero. Se $0 < a < 1$, designando $b = \frac{1}{a}$, tem-se que $b > 1$. Pelo ponto 1. sabemos que $b^n \xrightarrow[n]{} +\infty$, logo $a^n = \frac{1}{b^n} \xrightarrow[n]{} 0$.
   Se $-1 < a < 0$, designando $b = -a > 0$ tem-se que $a^n = (-1)^n b^n$. Como, pelo que vimos anteriormente, $b^n \xrightarrow[n]{} 0$ e $-b^n \leq a^n \leq b^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, concluímos que $a^n \xrightarrow[n]{} 0$.
4. Considerando as subsucessões dos termos de ordem par e dos termos de ordem ímpar, pelo que vimos antes é simples concluir que $\left(a^2\right)^n \xrightarrow[n]{} +\infty$ e $\left(a^2\right)^n \frac{1}{a} \xrightarrow[n]{} -\infty$, logo não existe $\lim\limits_n a^n$. ∎

Exercício resolvido 2.4

a) Mostre que $\lim_n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$.

b) Conclua que $\forall\, m \in \mathbb{Z} \qquad \lim_n \left(1+\dfrac{m}{n}\right)^n = e^m$.

Resolução:

a) Uma vez que

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}$$

tem-se que $\lim_n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e.1}$.

b) Observe-se que, se $m=0$, a afirmação é verdadeira. Seja então $m \neq 0$. Separemos a resolução em dois casos: i) $m>0$; ii) $m<0$.

i) Comecemos por observar que a sucessão $\left(\left(1+\frac{m}{n}\right)^n\right)_n$ é convergente, uma vez que é monótona e limitada (a demonstração é análoga à efectuada na Proposição 2.29 para a sucessão $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$. Além disso, como $\left(\left(1+\frac{m}{mn}\right)^{mn}\right)_n$ é uma subsucessão de $\left(\left(1+\frac{m}{n}\right)^n\right)_n$,

$$\begin{aligned}\lim_n \left(1+\frac{m}{n}\right)^n &= \lim_n \left(1+\frac{m}{mn}\right)^{mn} \\ &= \lim_n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^m = e^m.\end{aligned}$$

ii) Procede-se como em i), utilizando a alínea anterior. ■

Exercício resolvido 2.5 Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos tal que $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, com $L \in \mathbb{R}$. Mostre que então $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$.

Resolução:

Comecemos por observar que $L \geq 0$, uma vez que a sucessão $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ é uma sucessão de termos positivos.

Analisemos em primeiro lugar o caso $L = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n]{} 0$,

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, m \geq p \qquad 0 < \frac{a_{m+1}}{a_m} < \varepsilon\,.$$

Tem-se então que para $m \geq p$ se verifica

$$0 < \frac{a_{m+1}}{a_m}\frac{a_m}{a_{m-1}} \cdots \frac{a_{p+1}}{a_p} < \varepsilon^{m-p+1},$$

ou seja,

$$0 < a_{m+1} < a_p\, \varepsilon^{m-p+1} \quad \forall m \geq p.$$

Tomando $n = m + 1$ tem-se

$$0 < a_n < a_p\, \varepsilon^{n-p} \quad \forall n \geq p + 1,$$

logo

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_p}{\varepsilon^p}}\ \varepsilon \quad \forall n \geq p + 1.$$

Designando $b_n = \sqrt[n]{\frac{a_p}{\varepsilon^p}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, (resolva o Exercício proposto 2.4, alínea c)) como $b_n \xrightarrow[n]{} 1$,

$$\exists\, p_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p_1 \qquad b_n < 2,$$

logo, para $n \geq \max\{p + 1, p_1\}$, tem-se $0 < \sqrt[n]{a_n} < 2\varepsilon$. Conclui-se assim que $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n]{} 0$.

Consideremos agora o caso em que $L > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, considere-se $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \frac{L}{2}\}$. Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n]{} L$,

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, m \geq p \qquad L - \varepsilon_1 < \frac{a_{m+1}}{a_m} < L + \varepsilon_1\,.$$

Tem-se então que para $m \geq p$ se verifica

$$(L - \varepsilon_1)^{n-p+1} < \frac{a_{m+1}}{a_m}\frac{a_m}{a_{m-1}} \cdots \frac{a_{p+1}}{a_p} < (L + \varepsilon_1)^{n-p+1},$$

ou seja,

$$a_p\,(L-\varepsilon_1)^{m-p+1} < a_{m+1} < a_p\,(L+\varepsilon_1)^{m-p+1} \quad \forall m \geq p.$$

Tomando $n = m+1$ tem-se

$$a_p\,(L-\varepsilon_1)^{n-p} < a_n < a_p\,(L+\varepsilon_1)^{n-p} \quad \forall n \geq p+1,$$

logo

$$\sqrt[n]{\frac{a_p}{(L-\varepsilon_1)^p}}\,(L-\varepsilon_1) < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_p}{(L+\varepsilon_1)^p}}\,(L+\varepsilon_1) \quad \forall n \geq p+1.$$

Escrevendo a expressão anterior como

$$L + b_n < \sqrt[n]{a_n} < L + c_n \quad \forall n \geq p+1,$$

onde

$$b_n = \sqrt[n]{\frac{a_p}{(L-\varepsilon_1)^p}}\,(L-\varepsilon_1) - L \qquad \text{e} \qquad c_n = \sqrt[n]{\frac{a_p}{(L+\varepsilon_1)^p}}\,(L+\varepsilon_1) - L, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

como $b_n \xrightarrow[n]{} -\varepsilon_1$ e $c_n \xrightarrow[n]{} \varepsilon_1$

$$\exists\, p_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p_1 \qquad b_n > -2\,\varepsilon_1 \qquad \text{e} \qquad \exists\, p_2 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p_2 \qquad c_n < 2\,\varepsilon_1,$$

logo, para $n \geq \max\{p+1, p_1, p_2\}$, tem-se

$$L - 2\,\varepsilon \leq L - 2\,\varepsilon_1 < \sqrt[n]{a_n} < L + 2\,\varepsilon_1 \leq L + 2\,\varepsilon.$$

Conclui-se assim que $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n]{} L.$ ■

Nota 2.97

1. *Dada uma sucessão de termos positivos $(x_n)_n$, pode existir limite de $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)_n$ sem que exista o limite de $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$. Como exemplo, considerem-se dois números reais positivos a, b tais que $a < b$ e considere-se a sucessão*

$$(x_n)_n = \left(a,\, a\,b,\, a^2b,\, a^2b^2,\, a^3b^2\, a^3b^3,\, \cdots\right).$$

   Como exercício conclua que $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)_n$ converge para $\sqrt{a\,b}$ mas $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$ é divergente.

2. *Ao estudarmos a convergência de uma série de termos positivos,* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$*, se o cálculo do* $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ *não permitir retirar qualquer conclusão por aplicação do corolário do critério de Cauchy, pelo exercício anterior, também nenhuma conclusão se tirará sobre a natureza da série calculando o* $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$. ■

Exercício resolvido 2.6 Estude a natureza da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}$.

Resolução:

Aplicando o critério de d'Alembert, tem-se que

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{\frac{(2(n+1))!\,(3(n+1))!}{(n+1)!\,(4(n+1))!}}{\frac{(2n)!\,(3n)!}{n!\,(4n)!}} &= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \\
&= \frac{2^2\,3^3}{4^4} = \frac{27}{64} < 1,
\end{aligned}$$

logo trata-se de uma série convergente. ■

Exercício resolvido 2.7 Mostre que se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente então $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$ é convergente.

Resolução:

Começamos por apresentar um resultado cuja verificação é deixada ao cuidado do aluno.

Sendo n um número natural, $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ números reais, tem-se que

$$\begin{aligned}
x_1\,y_1 + \cdots + x_n\,y_n &= x_1(y_1 - y_2) + \\
&\quad +(x_1 + x_2)(y_2 - y_3) + \\
&\quad +(x_1 + x_2 + x_3)(y_3 - y_4) + \\
&\quad \ldots \\
&\quad +(x_1 + \cdots + x_{n-1})(y_{n-1} - y_n) + \\
&\quad +(x_1 + \cdots + x_n)y_n.
\end{aligned}$$

Considere-se agora a série convergente $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Vamos verificar que a sucessão das somas parciais da série gerada por $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_n$ é sucessão de Cauchy.

Dados $n, k \in \mathbb{N}$, usando a identidade anterior, uma propriedade do valor absoluto e notando que $\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} > 0$, $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{n+k}\right| \quad \leq \quad & |a_n| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \\
& + |a_n + a_{n+1}| \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \\
& \cdots \\
& + |a_n + \cdots + a_{n+k-1}| \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) + \\
& + |a_n + \cdots + a_{n+k}| \, \frac{1}{n+k}
\end{aligned}$$

Como $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é convergente, a sucessão das somas parciais que lhe está associada é sucessão de Cauchy, logo

$$\exists\, p_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p_1\ \forall\, m \in \mathbb{N}_0 \qquad |a_n + \cdots + a_{n+m}| \leq 1.$$

Para $n \geq p_1$, usando as desigualdades anteriores, tem-se

$$\left|\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{n+k}\right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) + \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}.$$

Como $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$, dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, p_2 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p_2 \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Tomando $p = \max\{p_1, p_2\}$, tem-se que para $n \geq p$ e $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{n+k}\right| < \varepsilon$$

logo a sucessão das somas parciais de série gerada por $\left(\frac{a_n}{n}\right)_n$ é sucessão de Cauchy.

■

Exercício resolvido 2.8 Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ são duas séries absolutamente convergentes, de soma A e B, respectivamente, então a série$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ é absolutamente convergente de soma AB.

Observação: Este resultado sobre o produto de séries (conhecido como o produto de Cauchy) é aqui apresentado por uma questão de completude. Ele vai ser utilizado apenas na definição de função exponencial de base a, com $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, no Capítulo 4. Por não o considerarmos um resultado fundamental sobre séries, apresentamo-lo aqui como exercício resolvido, para os alunos mais interessados.

Resolução:

1. Comecemos por considerar o caso em que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ são séries de termos não negativos.

   Sejam
   $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{e} \qquad S_N = \sum_{n=0}^{N} c_n.$$
   Então
   $$0 \leq S_N = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \leq \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{N} b_n \right) \leq AB.$$
   Como $(S_n)_n$ é uma sucessão crescente e majorada por AB, ela é convergente para um número real não negativo C que, pela desigualdade anterior, é menor ou igual a AB. Mas, uma vez que
   $$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{N} b_n \right) \leq \sum_{n=0}^{2N} a_k b_{n-k} = S_{2N},$$
   fazendo $N \to +\infty$, concluímos que $AB \leq C$. Então $C = AB$.

2. Consideremos agora o caso geral, em que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ são séries absolutamente convergentes.

Definindo
$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n), \qquad a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n),$$
observa-se que $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \geq 0$. Uma vez que quer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ quer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ são absolutamente convergentes, podemos rearranjar os seus termos.

Então
$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} b_n^-\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+\right) \\
&\quad - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^-\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^-\right)
\end{aligned}$$

(utilizando o resultado já provado em 1.)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k^+ b_{n-k}^+ - \sum_{k=0}^{n} a_k^- b_{n-k}^+ - \sum_{k=0}^{n} a_k^+ b_{n-k}^- + \sum_{k=0}^{n} a_k^- b_{n-k}^-\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \left(a_k^+ - a_k^-\right) b_{n-k}^+ - \left(a_k^+ - a_k^-\right) b_{n-k}^-\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \left(b_{n-k}^+ - b_{n-k}^-\right)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.
\end{aligned}$$

■

2.4 Exercícios propostos

Exercício 2.1 Analise a monotonia das sucessões de termo geral

$$a_n = \frac{2n}{n+2} - \frac{n+2}{n+1}, \quad b_n = \frac{1+(-1)^n}{n}, \quad c_n = a^{\frac{1}{n}},\ a > 0.$$

Exercício 2.2 Mostre, recorrendo à definição, que $\dfrac{1}{1+n^2} \xrightarrow[n]{} 0$.

Exercício 2.3 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_n \dfrac{n^2+2n-1}{2n^2-3n+2}$;

b) $\lim_n \dfrac{n+\frac{1}{n}}{2n^2-3n+2}$;

c) $\lim_n \left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$;

d) $\lim_n \dfrac{\sqrt{n^3+2n-1}}{\sqrt[3]{n^2+4n+2}}$;

e) $\lim_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)$;

f) $\lim_n \dfrac{\left((-1)^n+(-1)^{n+p}\right)n-1}{2n-1}$, $p \in \mathbb{N}$;

g) $\lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$;

h) $\lim_n \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$;

i) $\lim_n \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(2n)!}$;

j) $\lim_n \dfrac{a^n-b^n}{(ab)^n}$, $0 < b < a$;

k) $\lim_n \dfrac{a^n b^n}{a^n+b^n}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$;

l) $\lim_n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+k}$, $k \in \mathbb{N}$;

m) $\lim_n \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$;

n) $\lim_n \left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2}$;

o) $\lim_n \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n}$.

Exercício 2.4 Mostre que:

a) $\lim_n \dfrac{n}{n+1} = 1$, pela definição;

b) $\lim \left(\sqrt[8]{n^2-1} - \sqrt[4]{n+1}\right) = 0$;

c) $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$;

d) $\lim_n \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\},\ a > 0,\ b > 0$.

Exercício 2.5 Mostre, pela definição, que a sucessão de termo geral $a_n = \dfrac{3n+1}{n+4}$ é de Cauchy mas que a sucessão de termo geral $b_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ não é.

Exercício 2.6 Considere a sucessão $a_n = (-1)^{n-1}\big(2n-1\big), n \in \mathbb{N}$. Verifique se são subsucessões de $\big(a_n\big)_n$ as seguintes sucessões:

a) $\big(b_n\big)_n = \big(1, 5, -3, -7, 9, 13, -11, -15, \dots\big)$;

b) $c_n = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}$;

c) $\big(d_n\big)_n = \big(-3, -7, -11, -15, -19, -23, \dots\big)$.

Exercício 2.7 Considere a sucessão $\big(x_n\big)_n = \left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right)_n$.

Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

a) para todo $\varepsilon > 0$ a desigualdade $|x_n| < \varepsilon$ só não se verifica para um número finito de termos de $\big(x_n\big)_n$;

b) para todo $\varepsilon > 0$ a desigualdade $|x_n - 1| < \varepsilon$ verifica-se para uma infinidade de termos de $\big(x_n\big)_n$;

c) existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x_n - 1| \geq \varepsilon$ para todos os valores de n suficientemente grandes;

d) para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x_n - 1| < \dfrac{1}{k}$, sempre que $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$;

e) a sucessão não é de Cauchy.

Exercício 2.8 Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

a) se os termos de uma sucessão convergente são alternadamente positivos e negativos, então o limite da sucessão é zero;

b) se $(a_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos tal que $\lim\limits_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 2$, então $\lim\limits_n a_n = 0$;

c) se $(a_n)_n$ é uma sucessão limitada não monótona, então $(a_n)_n$ é divergente;

d) se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são sucessões tais que $(a_n)_n$ é convergente e $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $(b_n)_n$ é convergente e $\lim_n b_n = \lim_n a_n$;

e) se $(a_n)_n$ é uma sucessão monótona tal que $\big(a_{3n}\big)_n$ é sucessão de Cauchy, então $(a_n)_n$ também é sucessão de Cauchy;

f) sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões. Se $a_n b_n \xrightarrow[n]{} 0$ então $a_n \xrightarrow[n]{} 0$ ou $b_n \xrightarrow[n]{} 0$;

g) se $(a_n)_n$ é uma sucessão tal que $a_{n+p} - a_n \geq \frac{1}{4}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}$, então $(a_n)_n$ não é sucessão de Cauchy;

h) Sejam $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente e $(b_n)_n$ uma sucessão crescente. Se $(a_n - b_n) \xrightarrow[n]{} 0$ então $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são convergentes;

i) se $(a_n)_n$ é uma sucessão limitada, então $\left(\frac{a_n}{n}\right)_n$ é uma sucessão convergente;

j) se $\big(a_n\big)_n$ é uma sucessão estritamente decrescente, então o contradomínio de $\big(a_n\big)_n$ é um conjunto numerável;

k) toda a subsucessão de uma sucessão monótona é monótona.

Exercício 2.9 Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique por que não existe:

a) uma sucessão real, convergente, não monótona;

b) uma sucessão de números inteiros, estritamente monótona e limitada;

c) uma sucessão de números racionais convergente para um número irracional;

d) uma sucessão de números irracionais convergente para um número racional;

e) uma sucessão que não admite nenhuma subsucessão convergente;

f) uma sucessão $\big(a_n\big)_n$ tal que $|a_n| \xrightarrow[n]{} 0$ mas $a_n \not\xrightarrow[n]{} 0$;

g) uma sucessão crescente, convergente para zero;

h) uma sucessão $(a_n)_n$ divergente cujas subsucessões $\big(a_{2n}\big)_n$, $\big(a_{2n-1}\big)_n$ e $\big(a_{3n}\big)_n$ sejam convergentes.

Exercício 2.10 Para cada uma das proposições (A) – (E), indique uma sucessão (1) – (7) para a qual ela é verdadeira.

Proposições:

(A) Para todo $\varepsilon > 0$ a desigualdade $|x_n - a| < \varepsilon$ só não se verifica para um número finito de termos de $(x_n)_n$;

(B) Para todo $\varepsilon > 0$ a desigualdade $|x_n - a| < \varepsilon$ verifica-se para uma infinidade de termos de $\left(x_n\right)_n$;

(C) Para algum $k \in \mathbb{N}$ a desigualdade $|x_n - a| < \varepsilon$ verifica-se para todo $n \geq k$ e para todo $\varepsilon > 0$;

(D) Existe um $\varepsilon > 0$ tal que $|x_n - a| \geq \varepsilon$ para todos os valores de n suficientemente grandes;

(E) Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $|x_n - a| < \dfrac{1}{k}$, sempre que $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Sucessões:

(1) $x_n = n - |8 - n|;\ a = -8;$

(2) $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n};\ a = 1;$

(3) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n;\ a = 2;$

(4) $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n};\ a = 1;$

(5) $x_n = 3;\ a = 3;$

(6) $x_n = \dfrac{2-n}{n^2};\ a = 1;$

(7) $x_n = n - |8 - n|;\ a = 8.$

Exercício 2.11 Seja $\left(a_n\right)_n$ uma sucessão real. Considere as seguintes afirmações:

I – $\exists \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} \qquad n \geq p \Longrightarrow a_n \geq \varepsilon;$

II – $\forall \varepsilon > 0\ \forall p \in \mathbb{N} \qquad n \geq p \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon;$

III – $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} \qquad n \geq p \Longrightarrow |a_n| > \varepsilon;$

A – A sucessão $\left(a_n\right)_n$ é positiva a partir de certa ordem;

B – A sucessão $\left(a_n\right)_n$ é a sucessão nula;

C – A sucessão $\left(a_n\right)_n$ é ilimitada.

Preencha o quadro abaixo, colocando em cada rectângulo a letra S se a implicação se verificar e a letra N caso contrário.

	$\Rightarrow$		$\Rightarrow$	
I		A		I
II		B		II
III		C		III

Exercício 2.12 Seja $\left(a_n\right)_n$ uma sucessão convergente para $a \neq 0$. Mostre que $\dfrac{1}{a_n} \xrightarrow[n]{} \dfrac{1}{a}$.

Exercício 2.13 Determine a relação que deve existir entre a e b para que

$$\lim_n \left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{2n+3} = \lim_n \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{bn+4}.$$

Exercício 2.14 Seja b um número real positivo e $(x_n)_n$ uma sucessão definida de forma recorrente por

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + b}{2x_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Verifique que $x_n^2 \geq b$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

b) Mostre que existe $\lim\limits_n x_n$ e determine-o.

Exercício 2.15 Seja $\left(x_n\right)_n$ uma sucessão real.

a) Mostre que é válida a seguinte implicação: $\lim\limits_n x_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_n \dfrac{x_n}{x_n+1} = 1$.

b) Verifique se a implicação contrária também é verdadeira.

Exercício 2.16 Encontre os valores de $p \in \mathbb{N}$ para os quais a sucessão de termo geral

$$a_n = \frac{2n^3 - n + 1}{3n^p + n - 2}$$

é convergente.

Exercício 2.17 Seja $(x_n)_n$ uma sucessão real tal que $|x_p - x_q| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$. Mostre que $(x_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy.

Exercício 2.18 Considere a sucessão $(v_n)_n$ tal que $v_n = \sum_{k=0}^{3n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim_n v_n$.

Sugestão: Enquadre $(v_n)_n$ por duas sucessões escolhidas convenientemente.

Exercício 2.19 Considere a sucessão $(v_n)_n$ tal que $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que se trata de uma sucessão monótona.

b) Estude a sucessão $(v_n)_n$ quanto à convergência.

Exercício 2.20 Seja $(a_n)_n$ a sucessão real tal que $a_n = \dfrac{\prod_{i=0}^{n}(2i+1)}{\prod_{i=0}^{n}(3i+3)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Calcule $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b) Calcule $\lim_n a_n$.

Exercício 2.21 Verifique se as seguintes séries numéricas são convergentes ou divergentes:

$a)\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n-1}{2n-1}$;

$b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\,\theta)}{n^2}, \ \theta \in \mathbb{R}$;

$c)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$;

$d)\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$;

$e)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n};$

$f)\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^n n};$

$g)\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n^n};$

$h)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};$

$i)\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n};$

$j)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100};$

$k)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-n\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{n}\right);$

$l)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\tfrac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha\in\mathbb{R}^+;$

$m)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{3.6.9\ldots(3n+3)};$

$n)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n};$

$o)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n\ \operatorname{sen} n}{n!};$

$p)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)};$

$q)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n;$

$r)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n+\frac{1}{2}}{n};$

$s)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$

$t)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n^3\left((\sqrt{2}+(-1)^n)\right)^n}{3^n};$

$u)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{n}\ \operatorname{sen}\Big((2n-1)\frac{\pi}{2}\Big);$

$v)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}};$

$w)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\ \operatorname{sen}\frac{1}{n};$

$x)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2\cos(n\pi)}{\sqrt[3]{1+n^2}};$

$y)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}};$

$z)\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n\ \operatorname{sen} n}{e^n}.$

Exercício 2.22 Verifique se é convergente a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sendo:

a) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par,} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar;} \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par,} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Exercício 2.23 Seja $\alpha \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \operatorname{sen}^{2n} \alpha$ converge se e só se $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

Exercício 2.24 Para que valores de $a \in \mathbb{R}^+$ é convergente a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{a^{2n+1}}$? Justifique.

Exercício 2.25 Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}$. Estude a sua natureza se:

a) $0 \leq a \leq b$; b) $0 \leq b \leq a \leq 1$; c) $1 \leq b \leq a$.

Exercício 2.26 Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$.

a) Mostre que se trata de uma série convergente.

b) Sabendo que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, qual é a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$?

Exercício 2.27 Dê exemplo, ou justifique por que não existe uma sucessão $(a_n)_n$ tal que:

a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ seja convergente e $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ seja divergente;

b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ seja convergente e $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ seja divergente;

c) $\left(n^2 a_n\right)_n$ convirja para zero e $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divirja;

d) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ seja divergente, $\lim_n a_n = 0$ e a sucessão das somas parciais seja limitada.

Exercício 2.28 Seja $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ uma série absolutamente convergente.

a) Mostre que se $(b_n)_n$ é uma sucessão limitada então $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ é absolutamente convergente.

b) Conclua que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ é convergente.

c) Conclua ainda que, se $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)^2$ converge.

Exercício 2.29 Sejam $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ duas séries de termos positivos convergentes. Mostre que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

Sugestão: Verifique que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_0^+ \qquad ab \leq (a+b)^2$.

Exercício 2.30 Seja $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ uma série de termos positivos, convergente. Seja $(x_n)_n$ uma sucessão tal que $|x_{n+1} - x_n| \leq a_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $(x_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy.

Exercício 2.31 Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos. Mostre que se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

Exercício 2.32 Indique se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas, justificando:

a) se uma série alternada é convergente, então a sua soma é zero;

b) se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, com $0 < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é convergente, então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ é convergente;

c) se a série gerada por $(a_n)_n$ é convergente, então a série gerada por qualquer subsucessão de $(a_n)_n$ é convergente;

d) se $(a_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos tal que $\lim_n (a_n \log n) = 2$, então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente;

e) se a sucessão $(a_n)_n$ é tal que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} |a_k| < 2$, então a série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é convergente;

f) se a série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, com $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é divergente, então a série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$ é divergente;

g) se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n < 0$ e $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é convergente, então $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ é convergente;

h) se $\lim\limits_n a_n = 2$, então $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \big(a_{n+1} - a_n\big)$ é convergente.

Exercício 2.33 Seja $\big(a_n\big)_n$ uma sucessão de termos não negativos decrescente. Mostre que, se a série gerada por $\big(a_n\big)_n$ é convergente, então a sucessão $\big(na_n\big)_n$ converge para 0.

3. Funções reais de variável real

A arte de fazer matemática
consiste em encontrar aquele caso especial
que contém todos os germes da generalidade.
(David Hilbert)

Neste capítulo vamos recordar os conceitos de limite de uma função num ponto, de continuidade num ponto e de continuidade global. Serão apresentados alguns resultados relativos a estes conceitos.

Muitos dos tópicos aqui introduzidos foram já abordados no $12^{\underline{\text{o}}}$ ano. A diferença substancial que os alunos irão encontrar está, por um lado, no facto de serem aqui apresentadas todas as justificações e demonstrações dos resultados utilizados e, por outro, no facto dos domínios das funções ou das suas expressões analíticas poderem ser mais "bizarros" que aqueles a que estão habituados.

3.1 Noções elementares

Comecemos por recordar alguns conceitos bem conhecidos, aproveitando para fixar notações.

Definição 3.1 *Chamamos* **função real de variável real** *a uma função* $f : X \longrightarrow Y$*, em que* X *e* Y *são subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$.

Nota 3.2 *No que se segue, uma função $f : X \longrightarrow Y$ designará sempre uma função real de variável real, isto é, X e Y designarão sempre subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.* ■

Nota 3.3 *É sabido que uma função fica definida pelo domínio, pelo conjunto de chegada e pela regra de correspondência ou lei de formação, que a cada elemento do domínio associa um único elemento do conjunto de chegada. Frequentemente, por abuso de notação, define--se uma função real de variável real apenas pela sua lei de formação, subentendendo-se que o seu domínio é o maior conjunto, no sentido da inclusão, onde essa lei tem sentido, e o seu conjunto de chegada é $\mathbb{R}$.* ■

Exemplo 3.4 *Dado $a \in \mathbb{R}$, à função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a \end{array}$ *chama-se* **função constante igual a a.** ■

Exemplo 3.5 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *Calculemos* $\mathrm{Im}\,(f)$ *e* $f^{-1}([1,2[)$.

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+,$$

$$f^{-1}([1,2[) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [1,2[\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 < 2\} = \left]-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right[.$$

■

Definição 3.6 *Dado um subconjunto X, não vazio, de $\mathbb{R}$, diz-se que* **X é simétrico relativamente a 0** *se $X = -X$ (ver Nota 1.26).*

Definição 3.7 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Diz-se que:*

- **f é uma função par** *se*

  X é simétrico relativamente a 0 e $\forall\, x \in X \quad f(-x) = f(x)$;

- **f é uma função ímpar** *se*

  X é simétrico relativamente a 0 e $\forall\, x \in X \quad f(-x) = -f(x)$.

Exemplo 3.8 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$ *é par e a função $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ é ímpar.* ■

Definição 3.9 *Dadas duas funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se*

- **soma de f e g:**

$$\begin{array}{rccl} f+g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

- **produto de f e g:**

$$\begin{array}{rccl} fg: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

- **quociente de f e g** *(supondo que $g(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in X$)***:**

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Nota 3.10 *No que se segue, dadas duas funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, utilizaremos a notação $\dfrac{f}{g}$ para indicar a seguinte função:*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & \{x \in X : g(x) \neq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

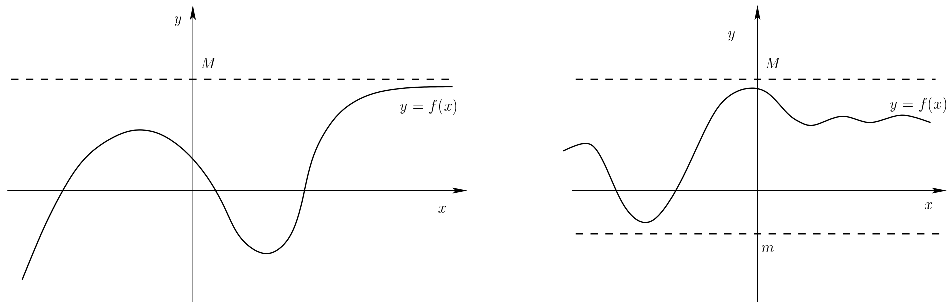
■

Definição 3.11 *Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, diz-se que*

- f *é* **majorada** *se* $\quad \exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X \quad f(x) \leq M$*;*
- f *é* **minorada** *se* $\quad \exists\, m \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X \quad m \leq f(x)$*;*
- f *é* **limitada** *se f é majorada e minorada.*

Nota 3.12 *Observe-se que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é majorada (respectivamente minorada, limitada) se e só se o conjunto $f(X)$ é majorado (respectivamente minorado, limitado).*

■



(a) (b)

Figura 3.1: A função cujo gráfico está esboçado em (a) é majorada e a que tem o gráfico esboçado em (b) é limitada.

Exemplo 3.13 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ *é limitada,*

pois $\forall\, x \in [1,+\infty[\qquad 0 < \dfrac{1}{x} \leq 1.$ ■

Exemplo 3.14 *A função* $\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ *é minorada mas não é majorada.*

Observe-se que f é minorada porque $\forall\, x \in\,]0,+\infty[\quad 0 < \frac{1}{x}$ e f não é majorada visto que $\forall\, M > 0 \quad \frac{1}{M} \in\,]0,+\infty[$ e $f\left(\frac{1}{M}\right) = M$. ■

Definição 3.15 *Uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *diz-se*

- **estritamente crescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$*;*
- **crescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$*;*
- **estritamente decrescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$*;*
- **decrescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$*;*
- **monótona** *se for crescente ou decrescente;*

- **estritamente monótona** *se for estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Exemplo 3.16 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ *é estritamente crescente.* ■

Exemplo 3.17 *Uma função constante é simultaneamente crescente e decrescente.* ■

Definição 3.18 *Seja* $f : X \longrightarrow Y$ *uma função. Um ponto* $x_0 \in X$ *diz-se*

- *um* **ponto de máximo local** *ou* **maximizante local** *de* f *(respectivamente* **ponto de mínimo local** *ou* **minimizante local** *de* f*) se*

  $$\exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap X \qquad f(x) \leq f(x_0) \;\; (\textit{respectivamente } f(x_0) \leq f(x))$$

  e $f(x_0)$ *diz-se* **máximo local** *de* f *(respectivamente* **mínimo local** *de* f*);*

- *um* **ponto de máximo local estrito** *de* f *(respectivamente* **ponto de mínimo local estrito** *de* f*) se*

  $$\exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap X \setminus \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0) \;\; (\textit{respectivamente } f(x_0) < f(x))$$

  e $f(x_0)$ *diz-se* **máximo local estrito** *de* f *(respectivamente* **mínimo local estrito** *de* f*);*

- *um* **ponto de máximo absoluto** *ou* **maximizante absoluto** *de* f *(respectivamente um* **ponto de mínimo absoluto** *ou* **minimizante absoluto** *de* f*) se*

  $$\forall\, x \in X \qquad f(x) \leq f(x_0) \;\; (\textit{respectivamente } f(x_0) \leq f(x)),$$

  e $f(x_0)$ *diz-se* **máximo absoluto** *de* f *(respectivamente* **mínimo absoluto** *de* f*);*

- *um* **ponto de extremo (local ou absoluto)** *se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou absoluto) de* f.

Nota 3.19 *O máximo absoluto (respectivamente o mínimo absoluto) de uma função* f *é simplesmente o máximo (respectivamente o mínimo) do conjunto* $f(X)$. ■

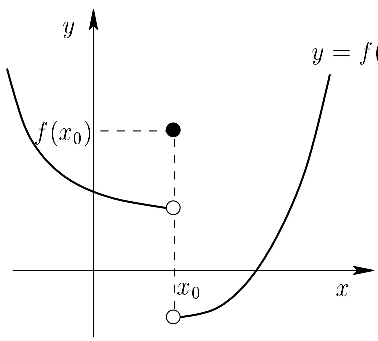


Figura 3.2: x_0 é um ponto de máximo local de f.

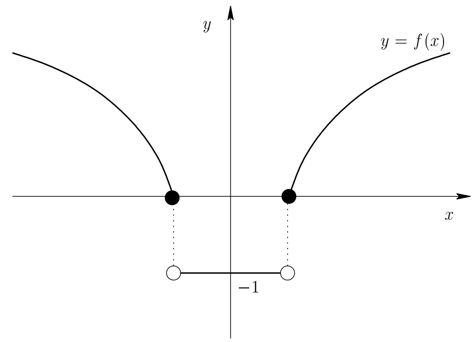


Figura 3.3: O mínimo absoluto da função é -1.

As figuras apresentadas ilustram alguns dos conceitos definidos anteriormente.

No Capítulo 1 foi definida a função inversa de uma função bijectiva $f : X \longrightarrow Y$ (ver Definição 1.10). No caso especial de estarmos a trabalhar com funções reais de variável real, a partir de uma representação gráfica da função f podemos obter uma representação gráfica de f^{-1}, procedendo como se indica na figura seguinte:

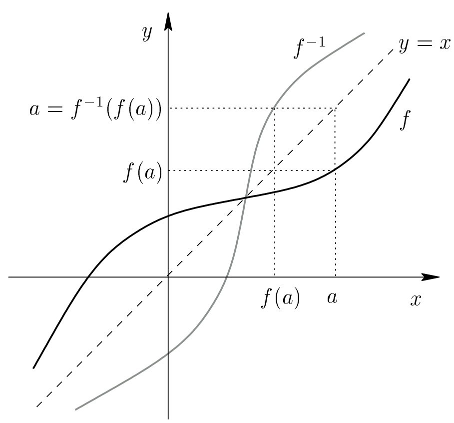


Figura 3.4: Esboço do gráfico da função inversa de uma função f, por construção do simétrico do gráfico de f relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo 3.20 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x|x| \end{array}$ *é invertível e a sua inversa é a função*

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

■

Exemplo 3.21 *As funções* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *e* $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *não são invertíveis.*

A função $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *é invertível.*

De facto, a primeira função não é injectiva nem sobrejectiva e a segunda não é injectiva. A função h é bijectiva e a sua inversa é $\begin{array}{rccc} h^{-1}: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+. \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

■

Nota 3.22 *Se uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *real de variável real é injectiva mas não sobrejectiva, é usual falar da inversa de* f*. Na realidade, cometemos um abuso de notação, chamando ainda* f *à função bijectiva que se obtém substituindo* Y *pelo contradomínio de* f*.*

■

Definição 3.23 *Sejam* $f : X \longrightarrow Y$ *e* $g : A \longrightarrow Y$*, funções tais que* $A \subseteq X$ *e* $g(x) = f(x)$*,* $\forall\, x \in A$*. A função* g *diz-se uma* **restrição** *de* f *e denota-se* $g = f_{|_A}$*. A função* f *diz-se um* **prolongamento** *de* g*.*

Exemplo 3.24 *As funções* $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *e* $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}$ *são prolongamentos de* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

■

3.2 Limites

Nesta secção vamos introduzir o conceito de limite de uma função num ponto de acumulação do domínio e estudar algumas das propriedades dos limites.

Definição 3.25 *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $c \in X'$ e $d \in \mathbb{R}$. Diz-se que o* **limite de f quando x tende para c** *é* **d** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in\ X \qquad 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Escreve-se então $\lim\limits_{x \to c} f(x) = d$.

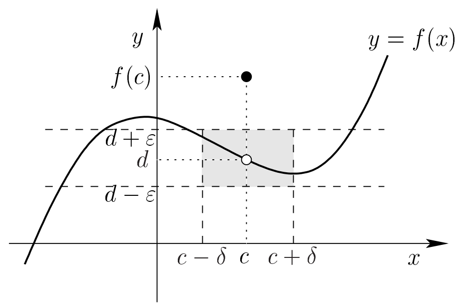


Figura 3.5: Interpretação geométrica da definição de limite de uma função num ponto.

Nota 3.26

- *Note-se que a definição de limite permite calcular $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, sendo $c \in X' \setminus X$, isto é, c pode não pertencer ao domínio da função;*
- *Se $c \in X \cap X'$, o $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ não tem de ser $f(c)$. Aliás, o valor que a função toma em c é irrelevante no cálculo do limite, visto que consideramos os pontos do domínio da função, próximos mas diferentes de c;*

- *Observando que* $0 < |x-c| \iff x \neq c$*, a definição de limite pode ser reescrita dos seguintes modos:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \qquad x \in X \cap\,]c-\delta, c+\delta[\, \setminus \{c\} \Longrightarrow\ d-\varepsilon < f(x) < d+\varepsilon;$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x \in X \setminus \{c\} \qquad c-\delta < x < c+\delta \Longrightarrow\ d-\varepsilon < f(x) < d+\varepsilon;$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{c\} \qquad |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x)-d| < \varepsilon.$$

■

Exemplo 3.27 *Seja* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$ $x \longmapsto \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *Então* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$

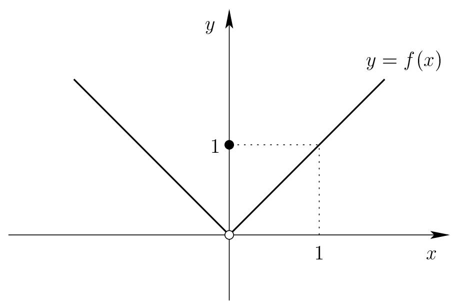


Figura 3.6: Exemplo de uma função que tem limite quando x tende para zero.

O gráfico da função f dá-nos a ideia intuitiva de que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Vamos prová-lo pela definição.

Seja $\varepsilon > 0$. Escolhendo $\delta = \varepsilon$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é tal que $|x-0| < \delta$ então $|f(x)-0| = |x| < \delta = \varepsilon$, o que mostra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Note-se que $f(0) = 1$, isto é, a função, no ponto $x = 0$, tem um valor diferente do $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

■

Vejamos agora algumas propriedades dos limites.

Proposição 3.28 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções, $c \in X'$, e suponhamos que existem $\lim_{x\to c} f(x)$ e $\lim_{x\to c} g(x)$. Então:*

1. *existe $\lim_{x\to c}(f+g)(x)$ e é igual a $\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$;*

2. *existe $\lim_{x\to c}(fg)(x)$ e é igual a $\lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} g(x)$;*

3. *se $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$ então existe $\lim_{x\to c} \frac{f}{g}(x)$ e é igual a $\dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.*

Demonstração: Vamos fazer apenas a demonstração de 2. As restantes alíneas são deixadas como exercício. A demonstração de 1. é muito simples e a demonstração de 3. tem um grau de dificuldade análogo à de 2..

Sejam $a = \lim_{x\to c} f(x)$ e $b = \lim_{x\to c} g(x)$. Então, dado ε tal que $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\exists\, \delta_1 > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{c\} \qquad |x-c| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|},$$

$$\exists\, \delta_2 > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{c\} \qquad |x-c| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}.$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \big|f(x)g(x) - ab\big| &= \Big|\big[(f(x)-a)+a\big]\big[(g(x)-b)+b\big] - ab\Big| \\ &\leq \big|f(x)-a\big|\big|g(x)-b\big| + \big|a\big|\big|g(x)-b\big| + \big|b\big|\big|f(x)-a\big|. \end{aligned}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Utilizando a desigualdade acima, se $x \in X \setminus \{c\}$ é tal que $|x-c| < \delta$, então

$$\begin{aligned} \big|f(x)g(x) - ab\big| &< \left(\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\right)^2 + |a|\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|} + |b|\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\left(\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|} + |a| + |b|\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\left(1+|a|+|b|\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

No caso em que $\varepsilon > 1$, procedendo como anteriormente, escolha-se δ de modo que, se $|x-c| < \delta$, então $|f(x)g(x) - ab| < 1$. Esse mesmo δ é tal que

$$|x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x)g(x) - ab| < \varepsilon.$$

□

Uma outra propriedade importante dos limites é a apresentada na proposição seguinte:

Proposição 3.29 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, $c \in X'$, d um número real e suponhamos que $\lim\limits_{x\to c} f(x) > d$ (respectivamente $\lim\limits_{x\to c} f(x) < d$). Então*

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in\,]c-\delta, c+\delta[\, \cap X \setminus \{c\} \qquad f(x) > d \ \text{ (respectivamente } f(x) < d\text{).}$$

Demonstração: Seja $b = \lim\limits_{x\to c} f(x)$. Tome-se $\varepsilon = b - d$. Note-se que $\varepsilon > 0$ e que, pela definição de limite,

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \qquad 0 < |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ou, equivalentemente,

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \qquad 0 < |x-c| < \delta \Longrightarrow b - (b-d) < f(x) < b + (b-d).$$

Em particular, se $x \in]c-\delta, c+\delta[\cap X \setminus \{c\}$ então $f(x) > d$. □

Nota 3.30 *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $c \in X'$ e d um número real.*

1. *Se*

   $$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in\ X\cap]c-\delta, c+\delta[\setminus\{c\} \qquad f(x) \geq d \qquad \text{(respectivamente } f(x) \leq d\text{),}$$

   então, resulta imediatamente da proposição anterior que, desde que exista, $\lim\limits_{x\to c} f(x) \geq d$ (respectivamente $\lim\limits_{x\to c} f(x) \leq d$).

2. *Do facto de*

   $$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in\ X\cap]c-\delta, c+\delta[\setminus\{c\} \qquad f(x) > d \qquad \text{(respectivamente } f(x) < d\text{),}$$

   não se pode concluir que $\lim\limits_{x\to c} f(x) > d$ (respectivamente $\lim\limits_{x\to c} f(x) < d$), como se verifica no exemplo seguinte. ■

Exemplo 3.31 *Seja* $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^+}$. *Então* $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) > 0$. *No entanto,* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. ■

O conceito de limite pode ser generalizado, permitindo-se que o $\lim_{x\to c} f(x)$ possa ser $+\infty$ ou $-\infty$.

Definição 3.32 *Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $c \in X'$. *Diz-se que:*

- *o* **limite de f quando** $\boldsymbol{x}$ **tende para** $\boldsymbol{c}$ *é* $+\infty$ *se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{c\} \qquad |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

  e escreve-se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$;

- *o* **limite de f quando** $\boldsymbol{x}$ **tende para** $\boldsymbol{c}$ *é* $-\infty$ *se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{c\} \qquad |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) < M$$

  e escreve-se $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$.

Nota 3.33 *Observe-se que a definição de* $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ *é equivalente a*

$$\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{c\} \qquad |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) > M,$$

isto é, é indiferente tomar na definição M *qualquer número real ou* M *qualquer número real positivo. Poderíamos também fazer* M *percorrer, por exemplo, apenas o conjunto dos números naturais (pense porquê!).* ■

Podemos também pensar no que acontece se o domínio X de uma função f for ilimitado, à direita ou à esquerda, e fizermos $x \in X$ tender para $+\infty$ ou $-\infty$.

Definição 3.34 *Seja* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função.*

Se X *é um conjunto não majorado, diz-se que:*

- *o* **limite de f quando** $\boldsymbol{x}$ **tende para** $+\infty$ *é* $\boldsymbol{d}$ *e escreve-se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = d$ *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X \qquad x > N \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon;$$

- *o* **limite de f quando x tende para $+\infty$** *é* $+\infty$ *e escreve-se* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in\ X \qquad x > N \Longrightarrow f(x) > M.$$

Deixa-se ao cuidado do leitor a definição de **limite de f quando x tende para $+\infty$** *é* $-\infty$*, escrevendo-se* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

Se X *é um conjunto não minorado, diz-se que*

- *o* **limite de f quando x tende para $-\infty$** *é* $\boldsymbol{d}$ *e escreve-se* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = d$ *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in\ X \quad x < N \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Deixa-se, uma vez mais, ao cuidado do leitor a definição de **limite de f quando x tende para $-\infty$** *é* $+\infty$ *ou é* $-\infty$*, escrevendo-se, respectivamente,* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$

Exemplo 3.35 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ *Então* $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

De facto, dado $M > 0$, escolhendo $\delta = \frac{1}{M}$, se $0 < |x| < \delta$ então $|f(x)| = \frac{1}{|x|} > M$, o que prova que $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = +\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolhendo $N = -\frac{1}{\varepsilon}$, se $x < N$ então $|f(x) - 0| = \frac{1}{-x} < \varepsilon$, o que prova que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0.$ ■

As propriedades do limite da soma e do produto de duas funções mantêm-se quando se substitui o ponto c onde se calcula o limite por $+\infty$ ou $-\infty$. No entanto, nem sempre é possível generalizar os resultados da Proposição 3.28 à situação em que alguns dos limites são zero ou infinito. Esses casos são vulgarmente referidos como situações de **indeterminações**. Tal como no Capítulo 2, remetemos o aluno para o anexo da página 220, onde é apresentada uma tabela relativa à aritmética de limites envolvendo limites infinitos. Essa tabela é extensiva à exponenciação, operação que só será introduzida no próximo capítulo.

Veremos no Capítulo 6 uma regra, a Regra de l'Hôpital, que será um bom auxiliar no cálculo de alguns destes limites.

Definição 3.36 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.*

- *Se $c \in X'_+$, diz-se que o* **limite de f quando x tende para c por valores superiores a c** *é* **d** *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \qquad x \in]c, c+\delta[\cap X \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

  Escreve-se $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = d$ e diz-se que o **limite à direita, de f, em c**, *é d.*

- *Se $c \in X'_-$, diz-se que o* **limite de f quando x tende para c por valores inferiores a c** *é* **d** *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \qquad x \in]c-\delta, c[\cap X \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

  Escreve-se $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = d$ e diz-se que o **limite à esquerda, de f, em c**, *é d.*

Nota 3.37 *De forma inteiramente análoga se definem $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$.* ■

Proposição 3.38 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in X'_+ \cap X'_-$. Então*

$$\lim_{x \to c} f(x) = d \Longleftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = d.$$

Demonstração: Este resultado é uma consequência imediata das definições. □

Proposição 3.39 *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $c \in X'_-$. Seja $d \in \mathbb{R}$ e suponhamos que existe $\delta > 0$ tal que para todo o $x \in]c-\delta, c[\cap X$ se tem $f(x) \leq d$ (respectivamente $f(x) \geq d$). Se $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ existe, então $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) \leq d$ (respectivamente $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) \geq d$).*

Demonstração: Basta adaptar o que está feito na Proposição 3.29 e na Nota 3.30 ao caso do limite à esquerda. □

Nota 3.40 *Mostra-se também que, se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função e $c \in X'_+$, a Proposição 3.39 é verdadeira se substituirmos $]c-\delta, c[$ por $]c, c+\delta[$ e $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ por $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.* ■

Proposição 3.41 *Sejam $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in X'$ e suponhamos que*

1. $\forall\, x \in X \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;

2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to c} h(x)$ *existem e são iguais a $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.*

Então existe $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$.

Demonstração: A demonstração é omitida, pois é uma adaptação a funções da demonstração efectuada para sucessões no Teorema 2.25. $\square$

Nota 3.42

1. *A proposição anterior continua válida se $c = +\infty$ (respectivamente $c = -\infty$) desde que X seja ilimitado à direita (respectivamente à esquerda);*

2. *A função g diz-se enquadrada pelas funções f e h.* $\blacksquare$

3.3 Continuidade

O conceito de continuidade de uma função num ponto do domínio é um conceito fundamental num curso de Análise em $\mathbb{R}$. Nesta secção introduzimos este conceito e apresentamos alguns exemplos importantes, deixando os teoremas sobre funções contínuas para um capítulo posterior.

Definição 3.43 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se* **contínua em $x_0 \in X$** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

A função f diz-se **contínua** *se for contínua em todos os pontos do domínio.*

Proposição 3.44 *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in X$. Então*

$$f \text{ contínua em } x_0 \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_0 \text{ é ponto isolado de } X \\ \text{ou} \\ x_0 \text{ é ponto de acumulação de } X \text{ e } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \end{array}\right.$$

Demonstração: Dado um ponto $x_0 \in X$, tem-se que ou $x_0 \in X'$ ou $x_0 \notin X'$.

Se $x_0 \in X'$, dizer que f é contínua em x_0 é equivalente a dizer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se $x_0 \notin X'$ então existe $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \setminus \{x_0\} = \emptyset$. Então, dado $\varepsilon > 0$, escolhendo o δ acima, se $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X$, x é necessariamente x_0, pelo que $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. □

Vejamos agora alguns exemplos:

Exemplo 3.45 *Qualquer função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

De facto, se $x_0 \in \mathbb{Z}$ e $\delta = 1$ então $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbb{Z} = \{x_0\}$, isto é, todos os pontos de $\mathbb{Z}$ são pontos isolados. Assim, f é contínua. ■

Exemplo 3.46 *Considere-se a função definida no Exemplo 3.27. Esta função é descontínua.*

Vimos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$. Então f é descontínua em $x = 0$, ou seja, f é uma função descontínua. ■

Exemplo 3.47 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *é contínua.*

Como

$$\forall\, x, y \in [0,1] \qquad |x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| \leq 2|x-y|,$$

dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ tem-se que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |x^2 - y^2| \leq 2|x-y| < 2\delta = \varepsilon.$$

■

Provámos assim a continuidade da função $f(x) = x^2$ num ponto x arbitrário do intervalo $[0,1]$. Verificámos, além disso, que a escolha de δ, na prova da continuidade desta função num ponto x, foi feita independentemente desse ponto x. Esta é uma propriedade importante de algumas funções, que justifica a definição de continuidade uniforme, que será introduzida posteriormente.

Vejamos agora exemplos de funções contínuas apenas em alguns pontos. Os alunos poderão procurar outros exemplos mais simples. Optámos por apresentar estes, pois têm a vantagem de poderem ser utilizados no Capítulo 6, sobre derivadas.

Exemplo 3.48 *Há funções definidas em $\mathbb{R}$ contínuas apenas num ponto.*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

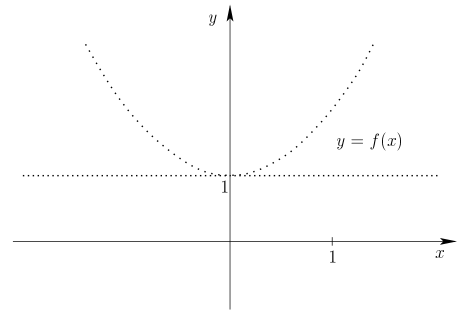


Figura 3.7: Função contínua apenas no ponto $x = 0$.

A descontinuidade de f em todos os pontos excepto $x = 0$ é óbvia. A continuidade da função em $x = 0$ verifica-se calculando $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. ■

Exemplo 3.49 *Há funções definidas em $\mathbb{R}$ contínuas em exactamente dois pontos.*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1+(x-1)^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}_0^+ \\ 1-(x+1)^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}^- \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

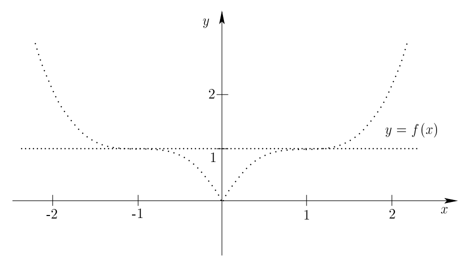


Figura 3.8: Função contínua exactamente em $x = -1$ e $x = 1$.

■

Exemplo 3.50 *Há funções definidas em $\mathbb{R}$ contínuas apenas num conjunto numerável de pontos.*

$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}
\end{array}
$$

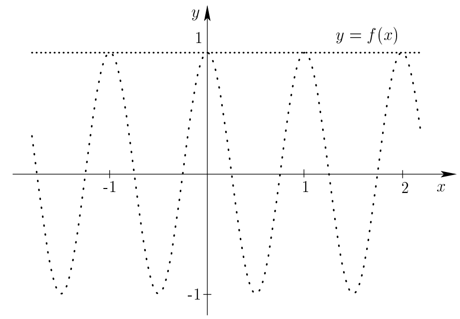


Figura 3.9: Função contínua apenas nos pontos de $\mathbb{Z}$.

■

Exemplo 3.51 *Há funções definidas em $\mathbb{R}$, descontínuas apenas num conjunto numerável de pontos. Basta considerarmos a função*

$$
\begin{array}{rccl}
[\,\cdot\,]: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & [x]
\end{array}
$$

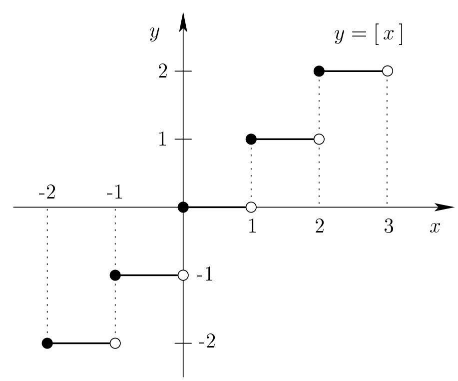


Figura 3.10: Função descontínua apenas nos pontos de $\mathbb{Z}$.

em que $[x]$ representa a característica ou parte inteira de x. ■

Exemplo 3.52 *Há funções definidas em $\mathbb{R}$ descontínuas em todos os pontos.*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

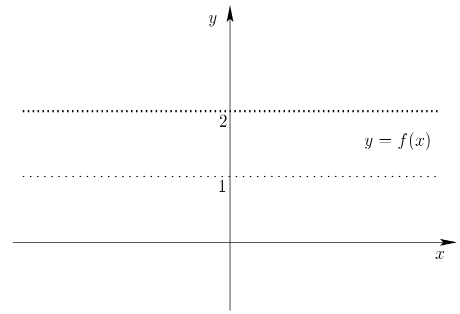


Figura 3.11: Função descontínua em todos os pontos.

■

Vejamos agora algumas propriedades relativas à continuidade de funções.

Proposição 3.53 *Dadas $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $x_0 \in X$,*

1. *$f + g$ e fg são funções contínuas em x_0;*
2. *se $g(x_0) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em x_0.*

Demonstração: A demonstração resulta imediatamente da definição de continuidade de uma função num ponto e da Proposição 3.28. □

Exemplo 3.54 *Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e considere-se*

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0.$$

O polinómio P é uma função contínua, por ser uma soma de produtos de funções contínuas. ■

Proposição 3.55 *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua em $x_0 \in X$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $f(x_0)$. Então $g \circ f$ é contínua em x_0.*

Demonstração: Como g é contínua em $f(x_0)$,

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,y\in Y \qquad |y-f(x_0)|<\delta\Longrightarrow|g(y)-g(f(x_0))|<\varepsilon. \tag{3.1}$$

Como f é contínua em x_0

$$\forall\,\delta>0\;\exists\,\eta>0\;\forall\,x\in X \qquad |x-x_0|<\eta\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\delta. \tag{3.2}$$

Então, fixado $\varepsilon>0$, escolha-se δ satisfazendo (3.1) e, fixado esse δ, escolha-se η satisfazendo (3.2). Assim,

$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\eta>0\;\forall\,x\in\;X$

$$|x-x_0|<\eta\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\delta\Longrightarrow|g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon,$$

o que mostra que $g\circ f$ é contínua em x_0. □

Corolário 3.56 *Sejam $f:X\longrightarrow Y$ e $g:Y\longrightarrow\mathbb{R}$ funções contínuas. Então $g\circ f$ é contínua.*

Demonstração: Decorre imediatamente da proposição anterior e da definição de função contínua. □

Exemplo 3.57 *A função*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

é descontínua em todos os pontos e $f\circ f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é a função constante igual a zero, contínua em $\mathbb{R}$. ■

Proposição 3.58 *Sejam $f:X\longrightarrow Y$ uma função contínua e A um subconjunto não vazio de X. Então $f_{|A}$ é contínua.*

Demonstração: É uma consequência imediata da definição de continuidade. □

Introduzimos agora um novo conceito, justificado pela observação feita no Exemplo 3.47, o conceito de continuidade uniforme de uma função.

Definição 3.59 *Diz-se que uma* **função** $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é* **uniformemente contínua** *se*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x, y \in X \qquad |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nota 3.60

- *É evidente que uma função uniformemente contínua é contínua.*
- *Uma função contínua é uniformemente contínua quando, dado $\varepsilon > 0$, a escolha de δ pode ser feita de forma independente do ponto onde se está a provar a continuidade.*

■

O exemplo seguinte mostra que existem funções contínuas que não são uniformemente contínuas.

Exemplo 3.61 *A função* $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *não é uniformemente contínua.*

Para verificarmos que f não é uniformemente contínua temos de mostrar que

$$\exists\,\varepsilon > 0\ \forall\,\delta > 0\ \exists\,x, y \in \mathbb{R} \qquad |x - y| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Sejam $\varepsilon = 1$ e $\delta > 0$. Tome-se $x = \dfrac{1}{\delta}$ e $y = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$.
Então $|x - y| = \dfrac{\delta}{2}$ e $|f(x) - f(y)| = 1 + \dfrac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$. ■

3.4 Um pouco mais sobre continuidade

Vamos agora falar um pouco mais sobre continuidade de funções. Pode entender-se esta secção como um complemento ao resto do capítulo, cuja leitura o aluno pode omitir se não pretender aprofundar os seus conhecimentos. As noções introduzidas nos capítulos subsequentes não necessitam dos conceitos referidos nesta secção.

Não há razão para um prolongamento de uma função contínua ser uma função contínua, nem sequer no conjunto dos pontos de continuidade da função original, como se pode verificar no exemplo seguinte:

Exemplo 3.62 *Seja* $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & 1 \end{array}$ *A função f é contínua. Consideremos dois prolongamentos de f,* $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 \end{array}$ *e* $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$

A função g é contínua em todos os pontos do domínio e a função h é descontínua em todos os pontos do domínio. ■

Além disso, há funções que não se podem prolongar continuamente a nenhum conjunto que contenha estritamente o seu domínio.

Exemplo 3.63 *A função* $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ *não admite nenhum prolongamento contínuo a $\mathbb{R}$, uma vez que* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\left(\text{ou } \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\right)$. ■

É possível, no entanto, sob certas condições, prolongar continuamente uma função, definida num subconjunto X de $\mathbb{R}$, ao conjunto $\overline{X}$.

Proposição 3.64 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$\forall\, c \in X' \setminus X \quad \text{existe e é finito } \lim_{x \to c} f(x).$$

Então f admite um único prolongamento contínuo a $\overline{X}$.

Demonstração: O prolongamento contínuo de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ a $\overline{X}$, se existir, é necessariamente único. Este facto é uma consequência de um teorema que só será enunciado no Capítulo 5, o Teorema 5.1 (Teorema de Heine).

Como $\overline{X} = X \cup X'$, podemos definir $F : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X, \\ \lim\limits_{y \to x} f(y) & \text{se } x \in \overline{X} \setminus X. \end{cases}$$

Verifica-se que F está bem definida e é contínua em todos os pontos do seu domínio. □

Uma classe importante de funções contínuas é a das funções uniformemente contínuas e uma subclasse importante das funções uniformemente contínuas é a das funções lipschitzianas, que passamos a definir:

Definição 3.65 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se* **lipschitziana** *se*

$$\exists\, M > 0\ \forall\, x, y \in\ X \qquad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|.$$

Proposição 3.66 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função lipschitziana. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Como f é lipschitziana, existe $M > 0$ tal que

$$x, y \in X \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, escolha-se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Assim,

$$\forall\, x, y \in X \qquad |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \qquad \square$$

Exemplo 3.67 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ *é uniformemente contínua mas não é lipschiztiana.*

Dado $\varepsilon > 0$, escolha-se $\delta = \varepsilon^2$. Sejam $x, y \in [0, 1]$ e suponhamos que $x \geq y$. Então, se $|x - y| < \delta$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$, o que prova a continuidade uniforme de f.

Vejamos agora que f não é lipschitziana, isto é, que

$$\forall\, M > 0\ \exists\, x, y \in\ [0, 1] \qquad |f(x) - f(y)| > M|x - y|.$$

Dado $M > 0$ escolha-se $x = \dfrac{4}{n}$ e $y = \dfrac{1}{n}$, sendo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Vejamos que, para uma escolha conveniente de n, $|f(x) - f(y)| \geq M|x - y|$. De facto,

$$\left|\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} > \frac{3M}{n} = M\left|\frac{4}{n} - \frac{1}{n}\right|,$$

desde que escolhamos n de tal forma que $\sqrt{n}$ seja maior que $3M$. ■

Proposição 3.68 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Então f admite um prolongamento contínuo a $\overline{X}$.*

Demonstração: Apresentamos aqui um esboço da demonstração, deixando a cargo dos alunos completar os detalhes. Para esse efeito é conveniente utilizar (uma vez mais) o Teorema de Heine, enunciado e demonstrado no Capítulo 5.

- dado $x_0 \in \overline{X} \setminus X$, como $x_0 \in X'$, seja $(x_n)_n$ uma sucessão de elementos de X tal que $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$;
- como f é uniformemente contínua, prova-se que f transforma sucessões de Cauchy em sucessões de Cauchy. Então $\big(f(x_n)\big)_n$ é uma sucessão de Cauchy, e portanto convergente (ver Exercício proposto 3.28);
- defina-se $F(x_0) = \lim\limits_n f(x_n)$. Conclui-se que a função

$$\begin{array}{rccl} F: & \overline{X} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \lim\limits_n f(x_n) & \text{se } x \in \overline{X} \setminus X \\ f(x) & \text{se } x \in X \end{cases} \end{array}$$

  está bem definida, isto é, se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são sucessões em X convergentes para $x_0 \in \overline{X} \setminus X$ então $\lim\limits_n f(x_n) = \lim\limits_n f(y_n)$;
- a função F é um prolongamento de f e é contínua. □

3.5 Exercícios resolvidos

Exercício resolvido 3.1 Verifique se a função $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{2}{1+x^4} \end{array}$ é limitada ou monótona e indique, se possível, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do seu conjunto imagem.

Resolução:

- A função f é limitada pois

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad 1 + x^4 \geq 1 \qquad \text{logo} \qquad \big|f(x)\big| = \frac{2}{1+x^4} \leq 2;$$

- A função f não é monótona, visto que

$$f(-1) = 1 < f(0) = 2 \ \text{ e } \ f(0) = 2 > f(1) = 1;$$

- O conjunto imagem de f tem supremo, ínfimo, máximo mas não tem mínimo, pois

$$f(\mathbb{R}) =]0,2], \qquad \sup f = \max f = 2, \qquad \inf f = 0 \notin]0,2]. \qquad \blacksquare$$

Exercício resolvido 3.2 Prove, utilizando a definição, que $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^3-3x^2-2x+6} = \frac{6}{7}$.

Resolução:

Começamos por observar que $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x^2-2)$. Então

$$\left|\frac{x^2-9}{x^3-3x^2-2x+6} - \frac{6}{7}\right| = \left|\frac{x+3}{x^2-2} - \frac{6}{7}\right| = \left|\frac{(x-3)(6x+11)}{7(x^2-2)}\right|.$$

Seja δ um número positivo. Como $|x-3| < \delta \Longleftrightarrow 3-\delta < x < 3+\delta$, se escolhermos $\delta \leq 1$, concluímos que $2 < x < 4$. Então, $|6x+11| < 35$ e $|x^2-2| \geq 2$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, se escolhermos $\delta = \min\{1, \frac{14}{35}\varepsilon\}$, tem-se que

$$\begin{aligned} |x-3| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x^2-9}{x^3-3x^2-2x+6} - \frac{6}{7}\right| &= \left|\frac{(x-3)(6x+11)}{7(x^2-2)}\right| \\ &< \frac{35}{14}\delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício resolvido 3.3 Calcule o $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Note-se que, aplicando as propriedades dos limites, imediatamente se observa que

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 0 \\ \\ \dfrac{0}{4a^2} = 0 & \text{se } a \neq 0. \end{cases}$$

$\blacksquare$

Exercício resolvido 3.4 Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, não nula, tal que $f(0) = 0$ e f verifica a condição

$$\forall\, \eta > 0\ \exists\, x_0 \in \mathbb{R} \quad |x_0| < \eta\ \wedge\ |f(x_0)| > 0,01.$$

Resolução:

Para encontrarmos uma função que verifique a condição pedida, basta seleccionarmos uma função descontínua em $x = 0$, em que se possa escolher $\varepsilon = 0,01$ na condição de descontinuidade. Seja, por exemplo, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Assim, dado $\eta > 0$, seja $x_0 = \frac{\eta}{2}$. Então $|x_0| < \eta$ e $|f(x_0)| = 1 > 0,01$.

■

Exercício resolvido 3.5 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, considere a família de funções $g_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g_{a,b}(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se} \quad x < a, \\ b & \text{se} \quad x = a, \\ 2x - 6 & \text{se} \quad x > a. \end{cases}$$

Verifique se existem valores de a e b tais que $g_{a,b}$ seja uma função contínua.

Resolução:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, a função $g_{a,b}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, por ser uma função polinomial em $]-\infty, a[$ e em $]a, +\infty[$. Vejamos se é possível escolher a e b de modo que ela seja contínua em $x = a$, isto é, tal que

$$\lim_{x \to a^-} g_{a,b}(x) = g_{a,b}(a) = \lim_{x \to a^+} g_{a,b}(x),$$

ou, de forma equivalente, tal que

$$a^2 - 9 = b = 2a - 6.$$

Verificamos que isto acontece se $a = -1$ e $b = -8$ ou então se $a = 3$ e $b = 0$. Temos assim duas funções contínuas:

$$g_{-1,-8}(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se} \quad x < -1, \\ -8 & \text{se} \quad x = -1, \\ 2x - 6 & \text{se} \quad x > -1. \end{cases} \qquad g_{3,0}(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se} \quad x < 3, \\ 0 & \text{se} \quad x = 3, \\ 2x - 6 & \text{se} \quad x > 3. \end{cases}$$

■

Exercício resolvido 3.6 Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando:

a) se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\forall \mu > 0 \; \forall\, x, y \in X \qquad |x - y| < \mu \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \mu,$$

então f é contínua;

b) a função $\begin{array}{rccc} f: &]1,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+1} \end{array}$ é uniformemente contínua.

Resolução:

a) A afirmação é **verdadeira** uma vez que, fixados $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, escolhendo $\delta = \varepsilon$, se $x \in X$ é tal que $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, provando-se assim a continuidade (uniforme, já que a escolha de δ não depende de x_0) de f no seu domínio.

b) A afirmação é **verdadeira** pois

$$\left|\frac{x}{x^2+1} - \frac{y}{y^2+1}\right| = \left|\frac{xy^2 + x - x^2y - y}{(x^2+1)(y^2+1)}\right| = \left|\frac{(xy-1)(y-x)}{(x^2+1)(y^2+1)}\right| \leq \frac{3}{4}|x - y|$$

uma vez que $x^2 + 1 > 2$, $y^2 + 1 > 2$ e $|xy - 1| \leq 3$, $\forall x,\, y \in \,]1,2]$.
Então, dado $\varepsilon > 0$, se escolhermos $\delta = \frac{4}{3}\varepsilon$, temos que

$$\forall\, x, y \in \,]1,2] \qquad |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{3}{4}|x - y| < \frac{3}{4}\delta = \varepsilon.$$

■

Exercício resolvido 3.7 Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona é descontínua, no máximo, num conjunto numerável de pontos.

Resolução: Podemos supor que f é crescente pois a resolução do exercício, no caso em que f é decrescente, é análoga.

Sejam $A = \{a \in \mathbb{R} : \ f$ é descontínua em $a\}$ e $a_1 \in A$. O conjunto $B_{a_1} = \{f(x) : x < a_1\}$ é majorado, uma vez que, como f é crescente, $f(a_1)$ é um majorante de B_{a_1}. Então B_{a_1} tem supremo L_{a_1}. Vejamos que $L_{a_1} = \lim\limits_{x \to a_1^-} f(x)$: dado $\varepsilon > 0$, por definição de supremo, existe x_0 tal que $f(x_0) \in B_{a_1}$ e $L_{a_1} - \varepsilon < f(x_0)$. Seja $\delta = a_1 - x_0$. Note-se que $\delta > 0$, pois $x_0 < a_1$. Como f é crescente, se $x \in \,]x_0, a_1[$ então $L_{a_1} - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L_{a_1} < L_{a_1} + \varepsilon$, isto é

$$x \in \,]x_0, a_1[\, \Longrightarrow |f(x) - L_{a_1}| < \varepsilon.$$

Seja $C_{a_1} = \{f(x) : x > a_1\}$. Como f é crescente, $f(a_1)$ é um minorante de C_{a_1}, pelo que C_{a_1} tem ínfimo. Seja M_{a_1} o ínfimo de C_{a_1}. Prova-se também que $M_{a_1} = \lim\limits_{x \to a_1^+} f(x)$. Tem-se assim que

$$\lim_{x \to a_1^-} f(x) \leq f(a_1) = L_{a_1} \leq M_{a_1} = \lim_{x \to a_1^+} f(x).$$

Por outro lado, como f é descontínua em a_1, alguma das desigualdades acima é estrita, logo $L_{a_1} < M_{a_1}$.

Se $a_2 \in A$ é tal que $a_1 < a_2$, então $L_{a_1} < M_{a_1} \leq L_{a_2} < M_{a_2}$. A desigualdade que não foi ainda justificada é $M_{a_1} \leq L_{a_2}$. Se supusermos que $M_{a_1} > L_{a_2}$, a forma como foram definidos M_{a_1} e L_{a_2} garante a existência de x_1 e x_2 tais que $a_1 < x_1 < x_2 < a_2$ e $f(x_2) < \dfrac{M_{a_1} + L_{a_2}}{2} < f(x_1)$, o que é impossível, uma vez que a função é crescente. Dado um ponto de descontinuidade de f, isto é um elemento $a \in A$, seja q_a um número racional do intervalo $]L_a, M_a[$. Então a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & a & \longmapsto & q_a \end{array}$$

é uma função injectiva de A em $\mathbb{Q}$. Conclui-se assim que $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Q})$. ■

3.6 Exercícios propostos

Exercício 3.1 Verifique se as seguintes funções são limitadas ou monótonas e indique, quando possível, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seus contradomínios:

a) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \ ; \\ & x & \longmapsto & \frac{|x|}{x} \end{array}$

b) $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \ ; \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x^2}-1 \end{array}$

c) $\begin{array}{rccl} h: &]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \ . \\ & x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$

Exercício 3.2 Em cada alínea, dê exemplo (ou justifique por que não existe) de uma função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, não nula, tal que $f(0)=0$ e verifique a condição:

a) $\exists\,\eta>0\ \exists\,x\in\mathbb{R} \qquad |x|<\eta\wedge|f(x)|>0,01;$

b) $\forall\,\delta>0\ \forall\,\varepsilon>0 \qquad |x|<\varepsilon\Longrightarrow|f(x)|<\delta;$

c) $\exists\,\eta>0\ \exists\,\mu>0 \qquad |x|<\mu\Longrightarrow|f(x)|<\eta.$

Exercício 3.3 Prove, utilizando a definição, que:

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4;$

b) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-1) = 19;$

c) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{8}{x-3} = 2.$

Exercício 3.4 Conclua a demonstração da Proposição 3.28.

Exercício 3.5 Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$;

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^2-t^2}{h}$;

c) $\displaystyle\lim_{t\to 0}(\operatorname{sen}(2t)+t^2\cos(5t))$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^4-2x+1}{-3x+1}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2x+1}{x^2-x}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x^2}$;

k) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{-3x+10}{x^4-2x+4}$.

Exercício 3.6 Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}|x| & \text{se} \quad x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

Diga para que valores de $a\in\mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ e determine o seu valor.

Exercício 3.7 Seja $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função limitada em cada intervalo limitado $[a,b]$ de $\mathbb{R}_0^+$. Mostre que se $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=L$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=L$.

Exercício 3.8 Prove a Proposição 3.41.

Exercício 3.9 Sejam $X\subseteq\mathbb{R}$, $a\in X'$, $f,g:X\longrightarrow\mathbb{R}$. Mostre que se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$, com $L<M$, então existe $\delta>0$ tal que se $x\in X$,

$$0<|x-a|<\delta\Longrightarrow f(x)<g(x).$$

Exercício 3.10 Sejam $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $a\in\mathbb{R}$. Diga se são ou não verdadeiras as seguintes afirmações, justificando:

a) $\lim\limits_{x\to 2a} f(x) = 2\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to a} f(2x) = 2\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 2a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(2x)$.

Exercício 3.11 Considere a função $\begin{array}{rccc} f: &]1,3[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} \end{array}$ Mostre, recorrendo à definição, que f é contínua em 2.

Exercício 3.12 Sejam f e g duas funções contínuas num intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$. Mostre que a função $\min(f,g)$ de I em $\mathbb{R}$, definida por $\min(f,g)(x)=\min\{f(x),g(x)\},\ \forall\, x\in I$, é contínua.

Exercício 3.13 Estude a continuidade das seguintes funções:

a) $f(x)=x-[x]$, onde $[x]$ representa a característica ou parte inteira de x;

b) $g(x)=\begin{cases} 5-\frac{|x|}{x} & \text{se} \quad x\neq 0, \\ 5 & \text{se} \quad x=0; \end{cases}$

c) $h(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

Exercício 3.14 Dê exemplos de funções $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ em que o conjunto dos pontos onde f é contínua seja:

a) $[0,1]$;

b) $\left\{\frac{1}{2}+n : n\in\mathbb{N}\right\}$;

c) $\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$;

d) $\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$;

e) $\{2^n : n\in\mathbb{N}\}$.

Exercício 3.15 Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty}|f(x)| = +\infty$;

b) se $(x_n)_n$ é uma sucessão tal que $|x_n| \xrightarrow[n]{} +\infty$ então $|f(x_n)| \xrightarrow[n]{} +\infty$.

Exercício 3.16 Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=0$ se $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $f(0)=1$, $f(x)=\frac{1}{q}$ se x é um número racional da forma $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}$ uma fracção irredutível, com $q>0$.

a) Mostre que, para todo $a\in\mathbb{R}$, se tem $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

b) Indique o conjunto dos pontos onde f é contínua.

Exercício 3.17 Sejam $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funções contínuas e $D=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\neq g(x)\}$. Mostre que D é um conjunto aberto.

Exercício 3.18 Sejam $f,g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(1)=g(0)$. Defina $h:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$h(x)=\begin{cases} f(2x) & \text{se } x\leq \frac{1}{2},\\ g(2x-1) & \text{se } x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Mostre que h é uma função contínua.

Exercício 3.19 Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe:

a) uma função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ descontínua tal que a função $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & f(|x|)\end{array}$ seja contínua;

b) uma função f e um conjunto A, com $\overline{A}$ contido no domínio de f, tal que $f_{|_A}$ seja contínua e $f_{|_{\overline{A}}}$ seja descontínua;

c) uma função de domínio $\mathbb{R}$, estritamente crescente e não sobrejectiva;

d) uma função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cujo conjunto de pontos de descontinuidade seja $\mathbb{N}$.

Exercício 3.20 Considere a função $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

a) Mostre, recorrendo à definição, que f é contínua em 0.

b) Considerando a função $g = f_{|_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}}$, verifique se g é uniformemente contínua.

Exercício 3.21 Mostre, a partir da definição, que as seguintes funções são uniformemente contínuas nos intervalos indicados:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, em $[0,3]$;

b) $g(x) = 2x^2 - x$, em $[0,10]$;

c) $h(x) = \dfrac{3}{x}$, em $[1,+\infty]$.

Exercício 3.22 Considere a função $\begin{array}{rccc} f: &]-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x+1} \end{array}$.

a) Verifique se $f_{|_{]0,1]}}$ é uniformemente contínua.

b) Verifique se f é uniformemente contínua.

Exercício 3.23 Mostre que a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é uniformemente contínua no intervalo $[\frac{1}{3}, +\infty[$, mas é apenas contínua em $\mathbb{R}^+$.

Exercício 3.24

a) Mostre que se f e g são funções lipschitzianas, o mesmo acontece a $f+g$.

b) Mostre que se f e g são funções lipschitzianas definidas num subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, então fg também é lipschitziana.

Exercício 3.25 Prove que $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Exercício 3.26 Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e suponha que para todo o $\varepsilon > 0$ existe uma função $g_\varepsilon : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que, para todo o $x \in X$, $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Mostre que f é contínua.

Exercício 3.27 Mostre que se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\exists\, \mu > 0 \;\forall\, x, y \in X \qquad |f(x) - f(y)| \leq \mu\sqrt{|x-y|},$$

então f é uniformemente contínua.

Exercício 3.28 (ver Proposição 3.64) Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua e $(x_n)_n$ uma sucessão real tal que $x_n \in X$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que se $(x_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy, então $\big(f(x_n)\big)_n$ é uma sucessão de Cauchy.

b) Conclua que se $(x_n)_n$ converge, então $\big(f(x_n)\big)_n$ é convergente.

c) Justifique que f admite uma extensão contínua a $\overline{X}$.

4. Algumas funções importantes

Como para tudo o resto
também para uma teoria matemática:
a beleza pode ser percebida
mas não explicada.

A. Cayley

Neste capítulo fazemos uma revisão das funções trigonométricas já conhecidas pelos alunos, introduzimos as restantes funções trigonométricas, consolidamos as definições de funções exponenciais e funções logaritmos e definimos as funções hiperbólicas. São também definidas as funções trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas. Os esboços dos gráficos de todas estas funções são apresentados neste capítulo.

4.1 Funções trigonométricas

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, bem como as suas representações gráficas, foram já introduzidas no Ensino Secundário. Pretendemos aqui fixar notações, definir as restantes funções trigonométricas, enunciar algumas propriedades importantes e apresentar algumas demonstrações dessas propriedades. Apesar dos alunos utilizarem já essas propriedades, não viram as respectivas demonstrações.

Os alunos já conhecem as definições das funções seno e cosseno . Estas funções foram introduzidas, quando o argumento é um ângulo entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, como relações entre as medidas dos catetos e da hipotenusa num triângulo rectângulo. Mais tarde estenderam-se as definições a ângulos entre 0 e 2π e, por periodicidade, a ângulos quaisquer, isto é, as funções seno e cosseno são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

A definição da função tangente é também conhecida. Para além das três funções já referidas, vamos introduzir as restantes funções trigonométricas, as funções cotangente, secante e cossecante.

Tangente

$$\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que } \mathrm{tg}\, x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x};$$

Cotangente

$$\mathrm{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que } \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x};$$

Secante

$$\sec : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que } \sec x = \frac{1}{\cos x};$$

Cossecante

$$\mathrm{cosec} : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que } \mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Apresentam-se de seguida os esboços dos gráficos das funções trigonométricas.

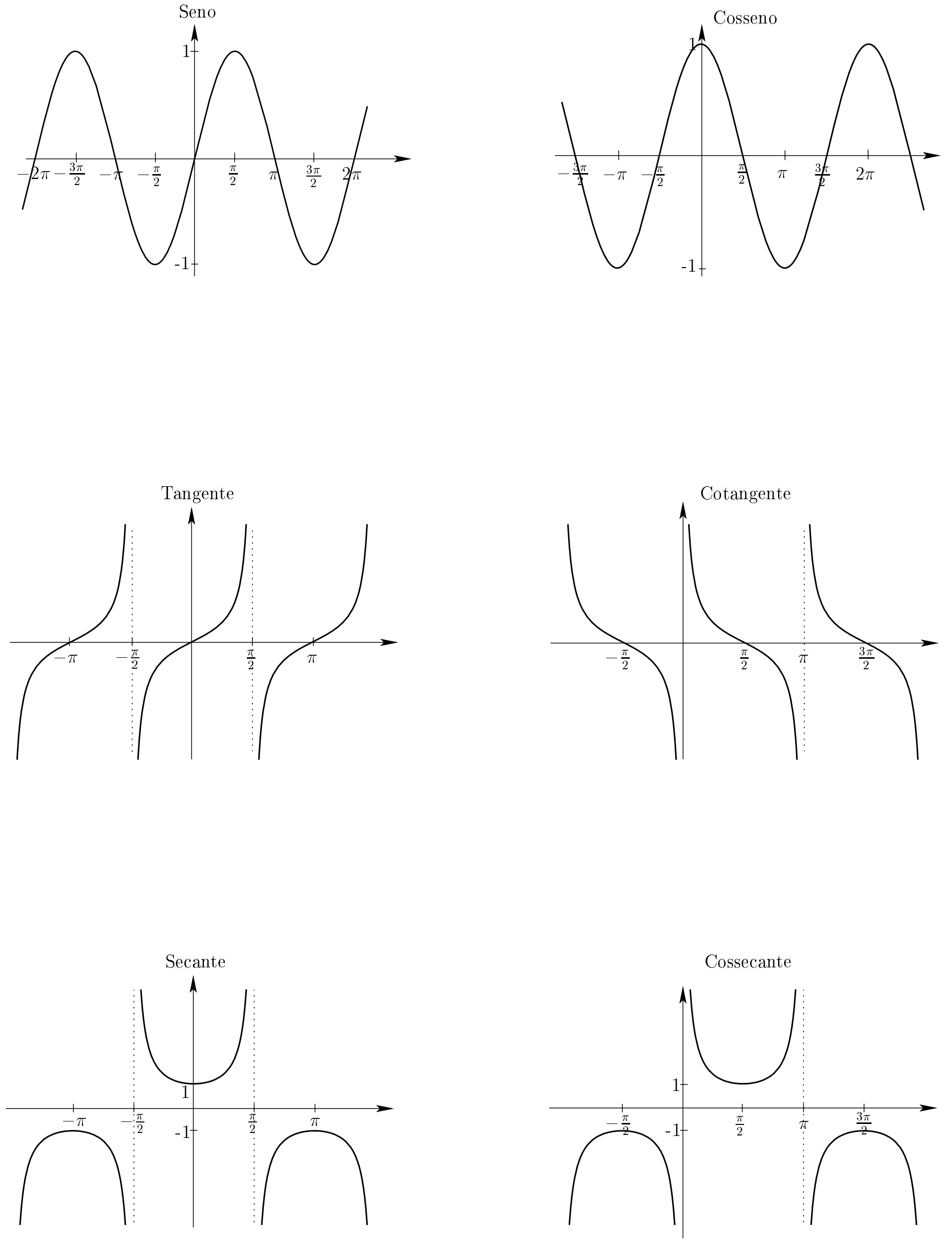


Figura 4.1: Esboços dos gráficos das funções trigonométricas.

Vamos agora apresentar algumas propriedades das funções trigonométricas. Como numa das propriedades intervém a noção de número complexo, recordamos os alunos que $a+ib$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$, representa um número complexo arbitrário.

Algumas propriedades das funções trigonométricas:

1. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1;$

2. $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a;$

3. $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a;$

4. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$ (a função sen é ímpar);

5. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \cos(-a) = \cos a$ (a função $\cos$ é par);

6. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - a) = \operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a;$

7. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sen}(a + 2\pi) = \operatorname{sen} a$ (a função sen tem período 2π);

8. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \cos(a + 2\pi) = \cos a$ (a função $\cos$ tem período 2π);

9. $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \cos a\, \operatorname{sen} b;$

10. $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R} \qquad \cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b.$

11. $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R} \qquad \cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}\ \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2}.$

12. $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}\ \cos \dfrac{a+b}{2}.$

13. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad (\cos a + i \operatorname{sen} a)^n = \cos(na) + i \operatorname{sen}(na).$

Demonstração: Estas propriedades são bem conhecidas dos alunos.

A primeira é a Fórmula Fundamental da Trigonometria e resulta directamente do Teorema de Pitágoras quando a é um ângulo do $1^{\underline{o}}$ quadrante. Dada a periodicidade das funções sen e $\cos$, basta mostrar esta propriedade para $a \in [0, 2\pi[$, o que se faz facilmente reduzindo o ângulo a a um ângulo do $1^{\underline{o}}$ quadrante.

As propriedades de **2.** a **8.** têm demonstração imediata a partir das definições das funções trigonométricas.

A propriedade **9.** decorre da propriedade **10.**, que por sua vez é uma consequência imediata da igualdade que vamos mostrar a seguir. Vejamos então que

$$\forall\, a,\ b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b, \tag{4.1}$$

recorrendo, para efectuar a demonstração, à figura seguinte:

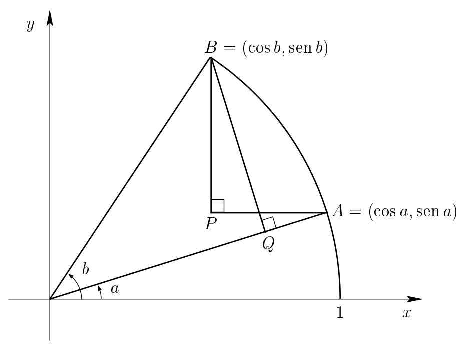


Figura 4.2: Relação entre o cosseno de $a-b$ e o seno e o cosseno de a e de b.

Olhando para a figura, facilmente se verifica que
$\overline{AP} = \cos\, a - \cos\, b, \qquad \overline{BP} = \operatorname{sen}\, b - \operatorname{sen}\, a.$
Então

$$\overline{AB}^2 = (\operatorname{sen}\, b - \operatorname{sen}\, a)^2 + (\cos\, a - \cos\, b)^2. \tag{4.2}$$

Por outro lado,

$$\overline{AQ} = 1 - \cos(b-a), \qquad \overline{BQ} = \operatorname{sen}(b-a). \tag{4.3}$$

Como

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2$$

de (4.2) e (4.3) concluímos que

$$(\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a)^2 + (\cos a - \cos b)^2 = (1 - \cos(b-a))^2 + \operatorname{sen}^2(b-a).$$

Desenvolvendo os quadrados da igualdade acima e usando o facto da função $\cos$ ser par, resulta (4.1).

Provemos agora a propriedade **11.**. Pela propriedade **10.** tem-se que

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} y, \\ \cos(x-y) = \cos x \, \cos y + \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} y. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, concluímos que

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \, \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} y.$$

Fazendo $a = x+y$ e $b = x-y$, verifica-se que $x = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{a-b}{2}$. Então,

$$\cos a - \cos b = -2 \, \operatorname{sen} \tfrac{a+b}{2} \, \operatorname{sen} \tfrac{a-b}{2}.$$

Para mostrarmos a propriedade **12.** basta notar que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) - \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - b\right) \\ &= -2 \, \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - a + \frac{\pi}{2} - b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - a - \frac{\pi}{2} + b}{2}\right) \\ &= 2 \, \cos\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\tfrac{a-b}{2}\right). \end{aligned}$$

Provemos a propriedade **13.** por indução sobre n:

se $n = 1$, a proposição é verdadeira;

supondo que $(\cos a + i \, \operatorname{sen} a)^k = \cos(ka) + i \, \operatorname{sen}(ka)$ se verifica para $k \in \mathbb{N}$, provemos que $(\cos a + i \, \operatorname{sen} a)^{k+1} = \cos((k+1)a) + i \, \operatorname{sen}((k+1)a)$. Utilizando a hipótese de indução, as propriedades **9.** e **10.** e as operações soma e produto de números complexos,

$$\begin{aligned}
(\cos a + i\ \operatorname{sen} a)^{k+1} &= (\cos a + i\ \operatorname{sen} a)^{k} (\cos a + i\ \operatorname{sen} a) \\
&= (\cos(ka) + i\ \operatorname{sen}(ka)) (\cos a + i\ \operatorname{sen} a) \\
&= (\cos(ka)\cos a - \operatorname{sen}(ka)\operatorname{sen} a) \\
&\quad + i\,(\operatorname{sen}(ka)\cos a + \cos(ka)\operatorname{sen} a) \\
&= \cos((k+1)a) + i\ \operatorname{sen}((k+1)a)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Apresentamos agora um resultado utilizado com frequência pelos alunos no Ensino Secundário:

Proposição 4.1 $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\ \theta}{\theta} = 1.$

Demonstração: Começamos por considerar a figura seguinte, que nos serve de apoio à demonstração, que será feita apenas no caso em que o ângulo $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

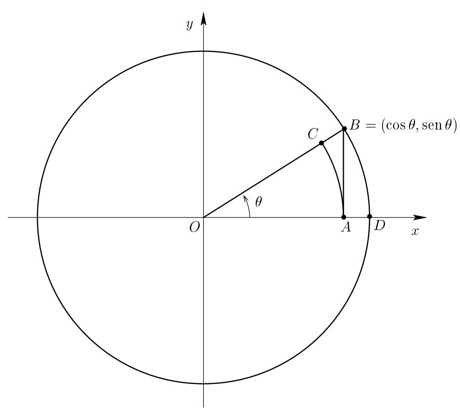


Figura 4.3: Limitação de $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

Observe-se então a figura, onde está representada uma circunferência de raio 1 e um ângulo ao centro de amplitude θ radianos. A área do sector circular AOC é menor que a do triângulo $[AOB]$ e a área do triângulo $[DOB]$ é menor que a do sector circular DOB. Observe-se que:

- o sector circular AOC é um sector com ângulo de amplitude θ, do círculo de raio $\overline{OA} = \cos\theta$. A sua área é $\frac{\theta}{2}\cos^2\theta$;
- o triângulo $[AOB]$ tem área $\dfrac{\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta}{2}$;
- o triângulo $[DOB]$ tem área $\dfrac{1\cdot \operatorname{sen}\theta}{2}$;
- o sector circular DOB é um sector com ângulo de amplitude θ, do círculo de raio $\overline{OD} = 1$. A sua área é $\dfrac{\theta}{2}$.

Temos assim que

$$\frac{\theta}{2}\cos^2\theta < \frac{\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{2} < \frac{\theta}{2}$$

e portanto

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

o que nos permite concluir que

$$1 = \lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta \leq \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1$$

e terminar assim a demonstração. $\square$

Nota 4.2 *É consequência da demonstração da proposição anterior e do facto da função* sen *ser ímpar que, se* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *então* $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$. *É então evidente, uma vez que* $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, *que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad |\operatorname{sen}\, x| \leq |x|. \tag{4.4}$$

$\blacksquare$

Teorema 4.3 *As funções trigonométricas são funções contínuas.*

Demonstração: Mostrando que as funções sen e $\cos$ são contínuas, imediatamente se conclui a continuidade das restantes funções trigonométricas, por serem definidas como quocientes de funções que são contínuas.

Vejamos então que sen é contínua. A demonstração de que $\cos$ é contínua é similar.

Pela propriedade **12.** das funções trigonométricas, sabemos que, se $a,\ b \in \mathbb{R}$, então $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| = \left|2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}\right| \leq 2\left|\frac{a-b}{2}\right|$, uma vez que, por (4.4), $\left|\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}\right| \leq \left|\frac{a-b}{2}\right|$ e que $\left|\cos \frac{a+b}{2}\right| \leq 1$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhendo $\delta = \varepsilon$ conclui-se que

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad |a-b| < \delta \Longrightarrow |\operatorname{sen}\, a - \operatorname{sen}\, b| \leq |a-b| < \delta = \varepsilon,$$

o que prova, não só a continuidade, mas também a continuidade uniforme da função sen.

□

4.2 Funções exponenciais e funções logaritmos

Os alunos conhecem já do Ensino Secundário as funções exponenciais e logaritmos de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ mas, na realidade, a definição destas funções nunca foi introduzida. O significado de a^n, em que $n \in \mathbb{Z}$ é claro, o de a^q, em que $q \in \mathbb{Q}$, pode ainda ser explicado, mas nunca foi introduzido, de maneira rigorosa, o significado, por exemplo, de $2^{\sqrt{2}}$ ou de e^{π}. No entanto, os alunos sabem derivar as funções exponenciais, invertê-las, traçar um esboço dos seus gráficos, etc..

Normalmente a definição das funções exponenciais ou das funções logaritmos é feita já no Ensino Superior e há várias abordagens possíveis. Podemos começar por definir as exponenciais e apresentar os logaritmos como as suas funções inversas ou proceder ao contrário. Fixando uma base, uma definição do logaritmo, nessa base, de um número racional, pode ser feita com os conhecimentos que os alunos trazem do Ensino Secundário. O Axioma do Supremo permite-nos dar um significado ao logaritmo de um número não racional, sendo possível provar seguidamente todas as propriedades conhecidas sobre as funções logaritmo. Há autores que introduzem as funções exponenciais utilizando equações diferenciais, outros que definem as exponenciais ou os logaritmos utilizando o cálculo integral. Estas definições pecam por se poderem fazer tardiamente, uma vez que nesta fase do curso, os termos *equação diferencial* ou *cálculo integral* são expressões sem significado.

Neste curso optámos por dar uma definição axiomática das funções exponenciais. Para mostrar que na realidade os axiomas definem univocamente uma função, é necessário introduzir alguns resultados mínimos sobre séries de potências e efectuar o produto de séries numa situação especial. Estes tópicos não são normalmente abordados numa primeira disciplina de Análise em $\mathbb{R}$ e surgem aqui apenas por uma questão de completude.

Nota 4.4 *Recordamos o aluno que*

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \ \forall\, n, m \in \mathbb{N} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,$$
$$\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a^{-n} = \tfrac{1}{a^n} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

Definição 4.5 *Dado $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, uma função $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se* **função exponencial de base a** *se satisfizer:*

$$\begin{aligned} &f_a \text{ é contínua;} \\ &\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad f_a(x+y) = f_a(x) f_a(y); \\ &f_a(1) = a. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Teorema 4.6 *Dado $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, existe uma única função $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo* (4.5).

Demonstração:
Unicidade: Comecemos por observar que $f_a(2) = f_a(1+1) = f_a(1)^2 = a^2$ e, por indução, conclui-se que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad f_a(n) = a^n.$$

Note-se que

$$f_a(0) = f_a(0+0) = f_a(0)^2, \qquad \text{logo} \qquad f_a(0)[f_a(0) - 1] = 0,$$

pelo que

$$f_a(0) = 0 \text{ ou } f_a(0) = 1.$$

Mas

$$f_a(0) = 0 \Longrightarrow a = f_a(1) = f_a(1+0) = f_a(1) f_a(0) = 0 \qquad \text{(absurdo, pois } a \neq 0).$$

Então $f_a(0) = 1$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, $f_a(0) = f_a(n-n) = f_a(n)f_a(-n)$ pelo que,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad f_a(n) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad f_a(-n) = \frac{1}{f_a(n)} = \frac{1}{a^n}.$$

Então

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad f_a(n) = a^n.$$

Note-se que, se $n \in \mathbb{N}$,

$$f_a(1) = f_a\left(n\ \tfrac{1}{n}\right) = \underbrace{f_a\left(\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right)}_{n \text{ parcelas}} = \left[f_a\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]^n,$$

donde se conclui que $f_a\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$.

Facilmente se estende a propriedade acima aos números inteiros negativos, ficando assim mostrado que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \qquad f_a\left(\tfrac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}.$$

Seja $\dfrac{m}{n}$ um número racional, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Então

$$f_a\left(\tfrac{m}{n}\right) = \underbrace{f_a\left(\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right)}_{m \text{ parcelas}} = \left[f_a\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

Provámos assim que

$$\forall\, q \in \mathbb{Q} \qquad f_a(q) = a^q.$$

Seja agora $x \in \mathbb{R}$. Utilizando o Exercício resolvido 1.7 é fácil concluir que existe $(q_n)_n$, sucessão de números racionais, tal que $\lim_n q_n = x$. Como f_a é uma função contínua, pelo Teorema 5.1,

$$f_a(x) = f_a(\lim_n q_n) = \lim_n f_a(q_n) = \lim_n a^{q_n},$$

pelo que, se a função f_a existir, ela é, de facto, única.

Existência: Observe-se, primeiramente, que a função f_a, se existir, nunca se anula, uma vez que

$$0 \neq a = f_a(1) = f_a(x)f_a(1-x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Antes de mostrar que uma função f_a com as propriedades acima indicadas existe, comecemos por mostrar que f_a é necessariamente injectiva.

Suponhamos, por absurdo, que f_a não é injectiva. Então existem $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, tais que $f_a(x) = f_a(y)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x < y$. Seja $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $y = x + h$. Então

$$f_a(y) = f_a(x+h) = f_a(x)f_a(h) = f_a(x),$$

pelo que $f_a(h) = 1$.

Separemos a demonstração em dois casos:

i) $a > 1$, ii) $a < 1$.

Consideramos apenas o caso i), tratando-se o caso ii) de forma análoga.

Foi provado que $\forall\, r \in \mathbb{Q} \quad f_a(r) = a^r$. Então $\lim\limits_{r \to +\infty,\ r \in \mathbb{Q}} f_a(r) = +\infty$, pelo que

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{Q} :\ r \geq M \qquad f_a(r) \geq 2.$$

Dado $x \in]M, +\infty[$, como $x = \lim\limits_n r_n$, sendo $r_n \in]M, +\infty[\cap \mathbb{Q}$, concluímos que

$$f_a(x) = \lim_n f_a(r_n) \geq 2.$$

Mas

$$nh \xrightarrow[n]{} +\infty \qquad \text{e} \qquad f_a(nh) = [f_a(h)]^n = \ 1 \xrightarrow[n]{} 1, \qquad \text{(absurdo).}$$

O absurdo resultou de termos suposto que f_a não era injectiva.

Seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- f está bem definida.

  De facto, a série acima converge, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, como se verifica aplicando o critério de d'Alembert à série dos módulos:

$$\lim_n \frac{\dfrac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\dfrac{|x^n|}{n!}} = \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

- f é contínua.

  Dado $x_0 \in \mathbb{R}$,

  $$f(x) - f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - x_0^n}{n!}.$$

  Mas $x^n - x_0^n = (x - x_0)P(x)$, sendo $P(x) = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-2}x + x_0^{n-1}$. Supondo que $|x - x_0| \leq 1$, então $|P(x)| \leq n(|x_0| + 1)^{n-1}$. Assim,

  $$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |x - x_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(|x_0| + 1)^{n-1}}{n!} \\ &= |x - x_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|x_0| + 1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= |x - x_0| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|x_0| + 1)^{n}}{n!} \end{aligned}$$

  A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|x_0| + 1)^{n}}{n!}$ é convergente e tem soma $S(x_0) > 0$. Escolhendo $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{S(x_0)}\right\}$, fica mostrada a continuidade de f em x_0.

- $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (recordar a Proposição 2.31).

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$.

Dados $x,\, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \qquad \text{(utilizando o binómio de Newton)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^k\, y^{n-k}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k\, y^{n-k}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \qquad \text{(utilizando o Exercício resolvido 2.8)}\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = f(x)f(y)
\end{aligned}$$

Concluiu-se assim que existe uma única função f tal que f é contínua, $f(1) = e$ e $f(x+y) = f(x)f(y)$, quaisquer que sejam x e y reais.

- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

  Mostrámos que as funções f_a nunca se anulam. Como $f(1) = e > 0$ e f é contínua, conclui-se, utilizando o Teorema 5.8, que f é positiva.

  Utilizando que, dado $q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = e^q$, é fácil verificar que $\lim\limits_{x \to -\infty,\ x \in \mathbb{Q}} f(x) = 0$ e que $\lim\limits_{x \to +\infty,\ x \in \mathbb{Q}} f(x) = +\infty$. Conclui-se assim, utilizando o Corolário 5.12, que o contradomínio de f é $\mathbb{R}^+$.

Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, como f é injectiva e o seu contradomínio é $\mathbb{R}^+$, existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = a$. Seja

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Note-se que $f_a(x) = f(\alpha x)$ e, por esse motivo, f_a é contínua e transforma o produto na soma. Além disso, $f_a(1) = f(\alpha) = a$, ficando assim provado que existe uma única função verificando (4.5). $\square$

Nota 4.7 *Sabemos já que existe uma única função exponencial de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e sabemos que o seu contradomínio é $\mathbb{R}^+$. Denotaremos essa função por $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ou simplesmente por a^x, com $x \in \mathbb{R}$ (omitindo a indicação do contradomínio, quando não houver ambiguidade).* ■

Definição 4.8 *Dado $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, uma função $g_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se* **função logaritmo de base a** *se for a função inversa da função $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.*

Denota-se a função logaritmo de base a por $\log_a$. A função logaritmo de base e denota-se simplesmente por $\log$.

Nota 4.9

1. *Como a função logaritmo de base a é a inversa da exponencial de base a:*

   i) a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua (este facto é uma consequência imediata do Teorema 5.16);

   ii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

   iii) $\log_a a = 1$.

2. *Facilmente se verifica que as propriedades acima caracterizam a função $\log_a$, isto é, se $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função que verifica i), ii) e iii), então $f = \log_a$.*

3. *Poderíamos então ter optado por mostrar que existe uma única função que satisfaz i), ii) e iii), função essa que designaríamos por $\log_a$, definindo a função exponencial de base a como a função inversa da função logaritmo de base a.* ■

Proposição 4.10

1. $\forall\, a \in \mathbb{R}^+\ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad a^{xy} = (a^x)^y$;

2. $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\ \forall\, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \log_a(b^x) = x\ \log_a b$;

3. $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\ \forall\, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \qquad \log_a x = \log_b x\ \log_a b$.

Demonstração:

1. A demonstração deste ponto é deixada ao cuidado do aluno.

2. Mostrar que, fixados $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $x \in \mathbb{R}$, se tem $\log_a(b^x) = x\ \log_a b$ é equivalente a mostrar que $a^{\log_a(b^x)} = a^{x\ \log_a b}$.

   Mas $a^{\log_a(b^x)} = b^x$, uma vez que as funções a^x e $\log_a x$ são inversas uma da outra e, $a^{x\ \log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^x = b^x$, também.

3. Vejamos que $f(x) = \log_b x\ \log_a b$, $x \in \mathbb{R}^+$ satisfaz i), ii) e iii), concluindo-se assim, imediatamente, que $\log_b x\ \log_a b = \log_a x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+.$ De facto,

   i) f é contínua;

   ii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+ \qquad f(xy) = \log_b(xy)\ \log_a b = (\log_b\ x + \log_b\ y)\log_a b = f(x) + f(y)$;

   iii) $f(a) = \log_b a \log_a b = 1$, pois , fazendo em 2. $x = \log_b a$, verifica-se que

$$1 = \log_a\left(b^{\log_b a}\right) = \log_a b\ \log_b a.$$

□

Apresentamos agora um esboço das representações gráficas das funções exponenciais e logaritmos de base a, quando a base está entre 0 e 1 ou é superior a 1.

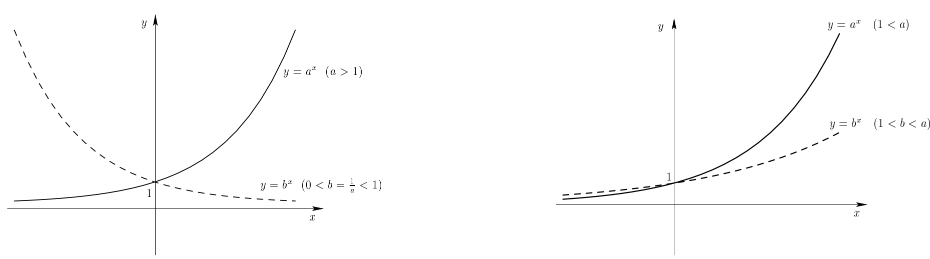


Figura 4.4: Esboços dos gráficos de funções exponenciais.

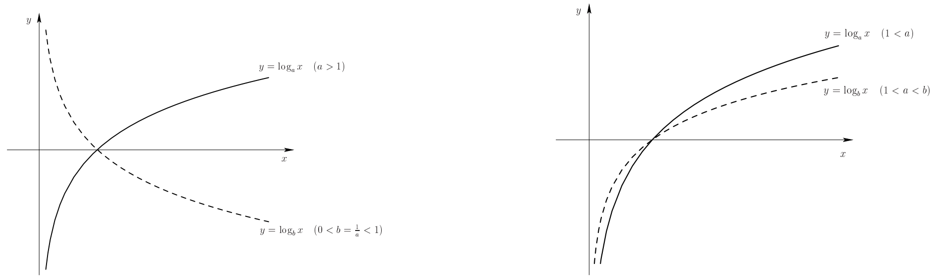


Figura 4.5: Esboços dos gráficos de funções logaritmos.

Nota 4.11 *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções, $f \geq 0$. Para calcular*

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)},$$

podemos proceder do seguinte modo:

- *comecemos por observar que* $f(x)^{g(x)} = e^{\log\ f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \log\ f(x)}$*;*
- *uma vez calculado* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \log(f(x))$*, se este valer* α*, sendo* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *então (utilizando a continuidade da função exponencial)*

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\alpha} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x) \log(f(x))}.$$

■

4.3 Funções hiperbólicas

Vamos apresentar nesta secção as definições das funções hiperbólicas, algumas propriedades e o esboço dos seus gráficos.

Seno hiperbólico

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Cosseno hiperbólico

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Tangente hiperbólica

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} \end{array}$$

Cotangente hiperbólica

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{coth}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{th}\, x} \end{array}$$

Secante hiperbólica

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sech}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x} \end{array}$$

Cossecante hiperbólica

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{cosech}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{sh}\, x} \end{array}$$

Nota 4.12 *Observe-se que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \mathrm{sech}\, x = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \mathrm{coth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad \mathrm{cosech}\, x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

■

Algumas propriedades das funções hiperbólicas:

1. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}^2\, a - \mathrm{sh}^2\, a = 1;$

2. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{th}^2 a + \mathrm{sech}^2\, a = 1;$

3. $\forall\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \mathrm{coth}^2\, a - \mathrm{cosech}^2\, a = 1;$

4. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sh}(-a) = -\operatorname{sh} a$ (a função sh é ímpar);

5. $\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch}(-a) = \operatorname{ch} a$ (a função ch é par);

6. $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$;

7. $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$;

8. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch}(na) + \operatorname{sh}(na)$.

Demonstração: Vamos apresentar aqui a demonstração das propriedades **1.** e **6.**, a título de exemplo.

1. Dado $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a &= \frac{(e^a + e^{-a})^2}{4} - \frac{(e^a - e^{-a})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2a} + 2 + e^{-2a} - e^{2a} + 2 - e^{-2a}}{4} = 1. \end{aligned}$$

6. Dados $a,\, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} a \ \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \ \operatorname{ch} a &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \ \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^b - e^{-b}}{2} \ \frac{e^a + e^{-a}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-(a-b)} - e^{-(a+b)}}{4} \\ &\quad + \frac{e^{a+b} + e^{-(a-b)} - e^{a-b} - e^{-(a+b)}}{4} \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} = \operatorname{sh}(a+b). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.13 *As funções hiperbólicas são funções contínuas.*

Demonstração: A demonstração é uma consequência imediata do facto destas funções serem somas e quocientes de funções exponenciais. □

Na página seguinte encontram-se os esboços dos gráficos das funções hiperbólicas.

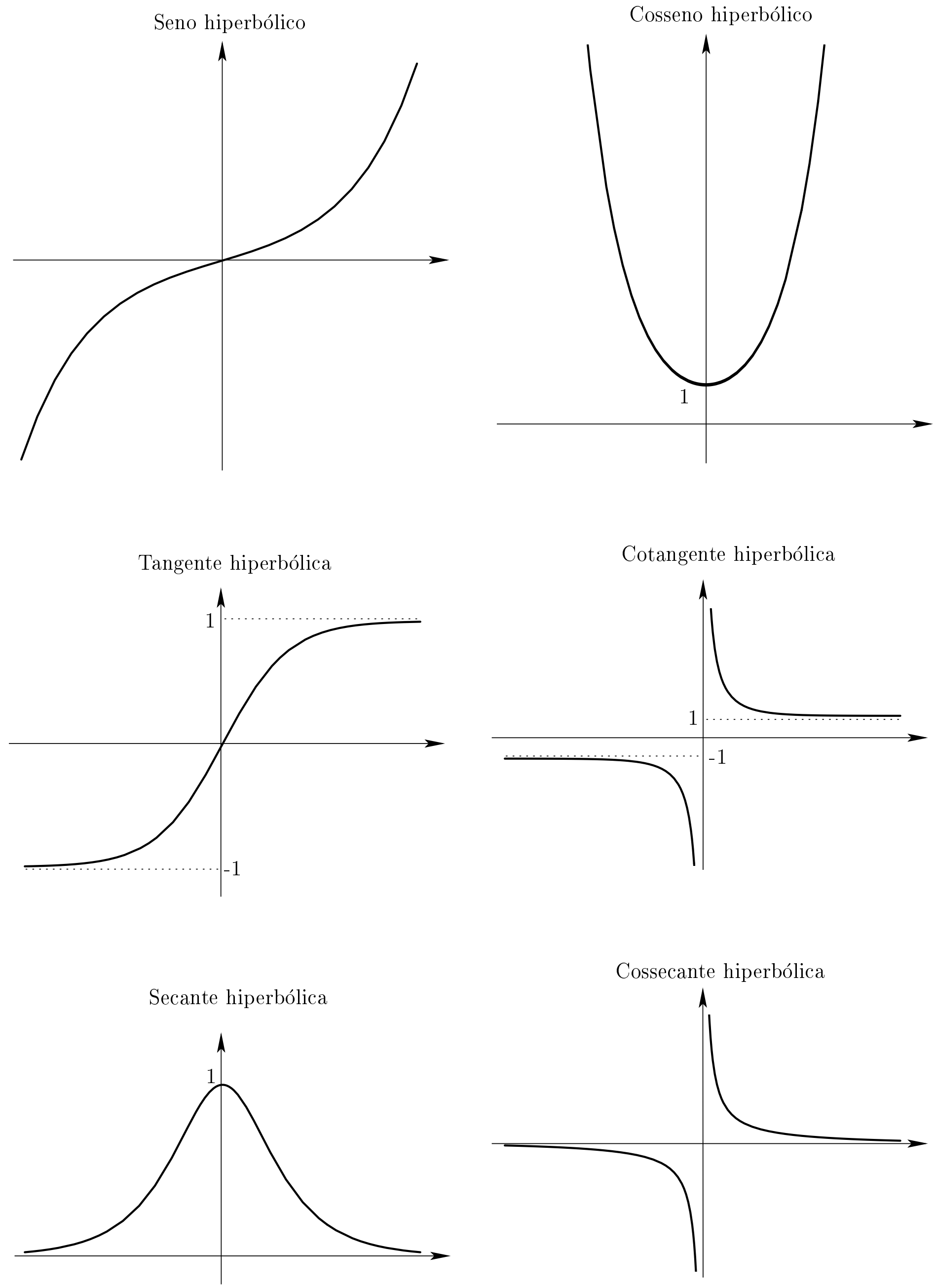


Figura 4.6: Esboços dos gráficos das funções hiperbólicas.

4.4 Funções trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas

Começamos por apresentar as definições das funções trigonométricas inversas, chamando a atenção dos alunos para o facto bem conhecido de que as funções trigonométricas não são injectivas. Assim, as funções trigonométricas inversas são as inversas de restrições, fixadas de ora em diante, das funções trigonométricas.

Arco-seno

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & \left(\mathrm{sen}_{|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}}\right)^{-1}(x) \end{array}$$

Arco-cosseno

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [\,0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \left(\cos_{|_{[\,0,\pi]}}\right)^{-1}(x) \end{array}$$

Arco-tangente

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arctg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longmapsto & \left(\mathrm{tg}_{|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}}\right)^{-1}(x) \end{array}$$

Arco-cotangente

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arcotg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\pi[\\ & x & \longmapsto & \left(\mathrm{cotg}_{|_{]\,0,\pi[}}\right)^{-1}(x) \end{array}$$

Arco-secante

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arcsec}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & [\,0,\frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & \left(\sec_{|_{[0,\frac{\pi}{2}[}}\right)^{-1}(x) \end{array}$$

Arco-cossecante

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arcosec}: & [1,+\infty[& \longrightarrow &]0,\frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & \left(\mathrm{cosec}_{|_{]0,\frac{\pi}{2}]}}\right)^{-1}(x) \end{array}$$

Teorema 4.14 *As funções trigonométricas inversas são funções contínuas.*

Demonstração: Este facto é uma consequência imediata do Teorema 5.16. □

Vejamos os esboços dos gráficos das funções trigonométricas inversas.

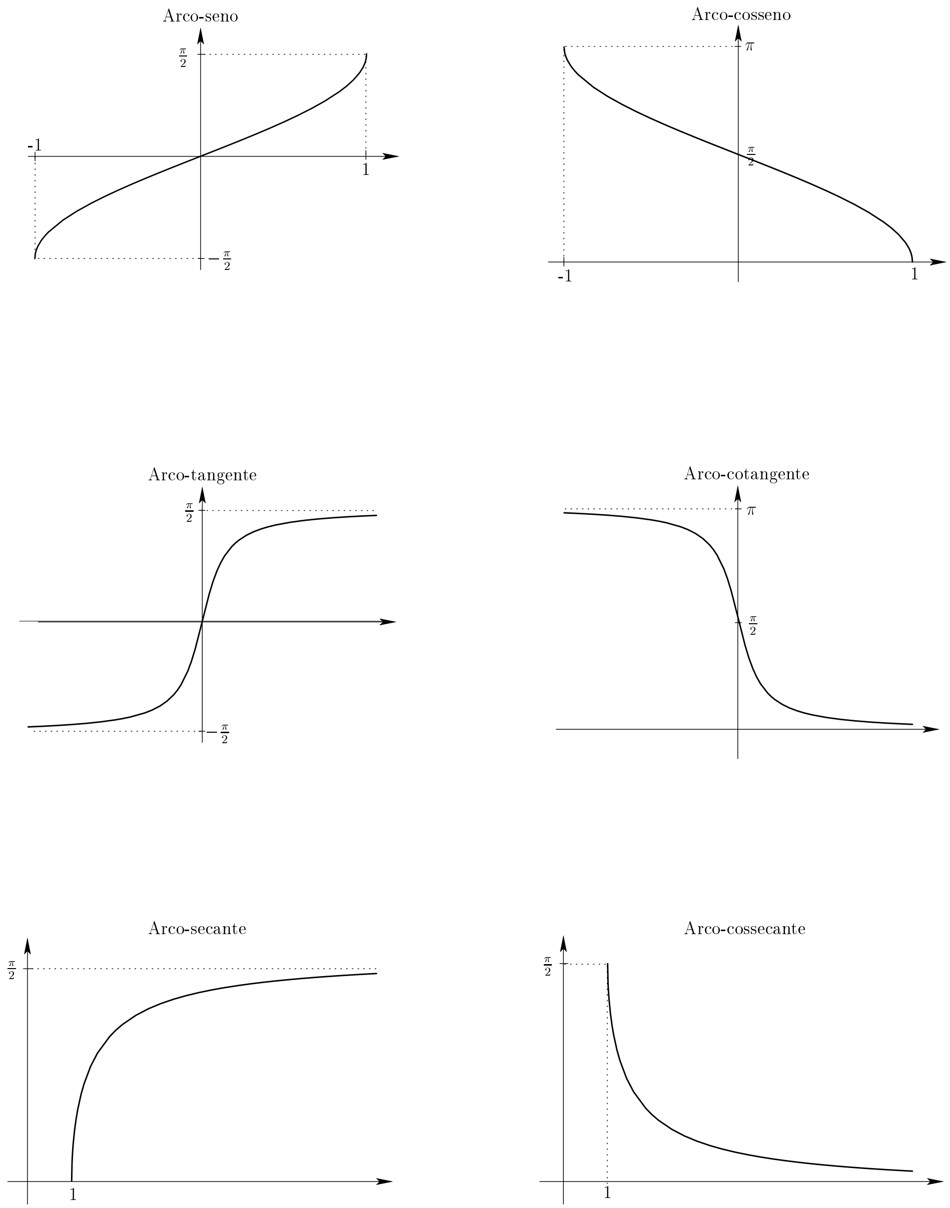


Figura 4.7: Esboços dos gráficos das funções trigonométricas inversas.

Vamos agora definir as funções hiperbólicas inversas. As funções ch e sech são as únicas funções hiperbólicas não injectivas. Por este motivo, definiremos, para cada uma delas, a inversa numa restrição do seu domínio, que será considerado fixo de agora em diante.

Argumento do seno hiperbólico

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argsh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\operatorname{sh})^{-1}(x) \end{array}$$

Argumento do cosseno hiperbólico

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argch}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \left(\operatorname{ch}_{|_{\mathbb{R}_0^+}}\right)^{-1}(x) \end{array}$$

Argumento da tangente hiperbólica

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argth}: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{th}^{-1}(x) \end{array}$$

Argumento da cotangente hiperbólica

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcoth}: & \mathbb{R}\setminus[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & x & \longmapsto & \coth^{-1}(x) \end{array}$$

Argumento da secante hiperbólica

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argsech}: &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \left(\operatorname{sech}_{|_{\mathbb{R}_0^+}}\right)^{-1}(x) \end{array}$$

Argumento da cossecante hiperbólica

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcosech}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{cosech}^{-1}(x) \end{array}$$

Teorema 4.15 *As funções hiperbólicas inversas são funções contínuas.*

Demonstração: Este facto é, uma vez mais, uma consequência imediata do Teorema 5.16.

□

Na página seguinte encontram-se esboços dos gráficos das funções hiperbólicas inversas.

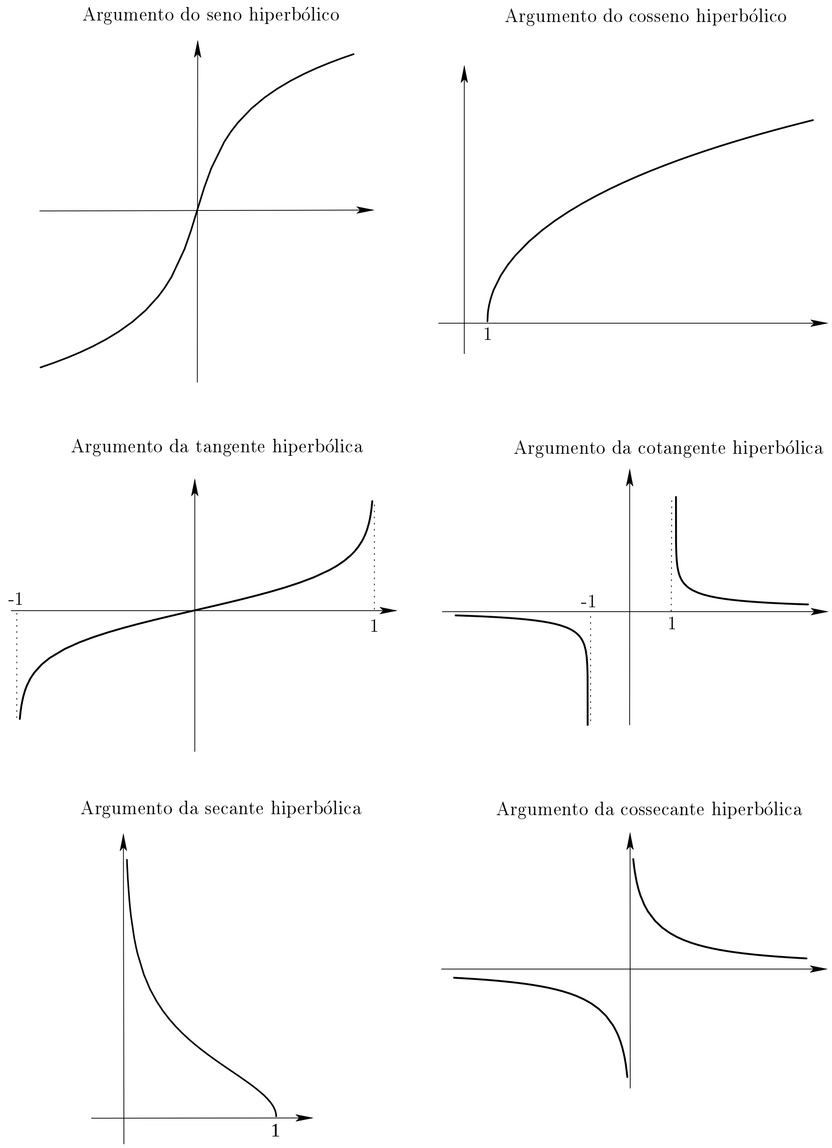


Figura 4.8: Esboços dos gráficos das funções hiperbólicas inversas.

4.5 Exercícios resolvidos

Exercício resolvido 4.1 Utilizando a relação $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$, mostre as seguintes igualdades:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}=2$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Resolução:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cos x=2\cdot 1=2.$

b) Note que

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2},\qquad x\neq 0.$$

Então

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2,\qquad x\neq \pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

■

Exercício resolvido 4.2 Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$, $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$, $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Resolução:

a) Dado $x\in[1,+\infty[$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\leq x<n+1$. Então

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leq 1+\frac{1}{n}$$

pelo que

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Como $\lim\limits_n \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = e$, concluímos que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \qquad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n > e-\varepsilon.$$

Então,

$$x \geq n_0 \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geq \left(1+\frac{1}{n_0+1}\right)^{n_0} > e-\varepsilon.$$

De modo análogo se prova, utilizando a outra desigualdade e o facto de $\lim\limits_n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \geq n_1 \Longrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1+1} < e+\varepsilon.$$

Então,

$$x \geq \max\{n_0, n_1\} \Longrightarrow \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = \dfrac{1}{e}$, sendo a demonstração análoga à efectuada no Exercício resolvido 2.4 do Capítulo 2.

c) Dados $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

- se $a=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} = 1$.
- se $a \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 0$ então

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{\frac{x}{a}\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{ba\frac{x}{a}} = \lim_{y\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{ab} = e^{ab}.$$

- se $a \in \mathbb{R}^-$, procede-se de forma análoga e a conclusão é a mesma.

■

4.6 Exercícios propostos

Exercício 4.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x}}$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$;

k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2\ \operatorname{sen} \sqrt{x}}{x\ \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Exercício 4.2 Encontre uma condição necessária e suficiente sobre $a \in \mathbb{R}$ para que

$$\lim_{x\to +\infty} (x + a\, x\ \operatorname{sen} x) = +\infty.$$

Exercício 4.3 Considere a função $g(x) = \dfrac{\log(x^2 - 3x + 2)}{\log(x^2 - 7x + 12)}$.

a) Determine o domínio de g.

b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

Exercício 4.4 Considere as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x\ \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Mostre que f é contínua e g é descontínua. Faça um esboço dos seus gráficos.

Exercício 4.5 A partir do gráfico da função $\arccos x$ esboce, justificando, o gráfico da função $g(x) = \arccos(3x) + 1$.

Exercício 4.6 Mostre as propriedades das funções hiperbólicas que não foram demonstradas na secção 4.3.

Exercício 4.7 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} A - \operatorname{th} x & \text{se } x < 0, \\ 2 & \text{se } x = 0, \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x + B & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Determine A e B de modo que f seja contínua.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{e^x}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{e^x}$.

Exercício 4.8 Sejam $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$

a) Calcule $\lim\limits_n f(2n\pi)$, $\lim\limits_n f\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\lim\limits_n g(2n\pi)$ e $\lim\limits_n g\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Utilize a alínea anterior para mostrar, pela definição, que não existem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) O que pode concluir quanto a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$?

Exercício 4.9 Seja $(a_n)_n$ uma sucessão convergente para a.

a) Mostre que $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \xrightarrow[n]{} a$.

b) Mostre que se os termos de $(a_n)_n$ são positivos então $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \xrightarrow[n]{} a$.

Sugestão: Aplique logaritmos e a alínea anterior.

5. Teoremas sobre continuidade

Quando tentamos provar um teorema
não listamos apenas as hipóteses
e começamos a raciocinar.
O que fazemos é tentativa e erro,
experimentação, suposição.
(Paul R. Halmos)

Neste capítulo enunciamos e demonstramos alguns teoremas que realçam propriedades importantes das funções contínuas, com especial relevo para as que estão definidas em intervalos.

5.1 Os Teoremas de Heine e de Heine-Borel

Esta secção apresenta o Teorema de Heine, que relaciona a noção de continuidade de uma função num ponto com a de continuidade por sucessões, e o Teorema de Heine-Borel. Este último põe em destaque uma propriedade importante dos intervalos fechados limitados, e será utilizado em alguns dos teoremas deste capítulo.

Teorema 5.1 (de Heine) *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $c \in X$. Então*

$$f \text{ contínua em } c \iff \begin{array}{l}\text{dada qualquer sucessão } (a_n)_n \text{ de} \\ \text{elementos de } X \text{ convergente para } c, \\ (f(a_n))_n \text{ converge para } f(c).\end{array}$$

Demonstração:

$\Longrightarrow$ Seja $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em c,

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \qquad |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Para este δ, como $a_n \xrightarrow[n]{} c$,

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad |a_n - c| < \delta.$$

Para esse $p \in \mathbb{N}$, se $n \geq p$, como $|a_n - c| < \delta$ então, por (5.1), $|f(a_n) - f(c)| < \varepsilon$, pelo que $f(a_n) \xrightarrow[n]{} f(c)$.

$\Longleftarrow$ Suponhamos que f é descontínua em c. Então

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in X \qquad |x - c| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon. \tag{5.2}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, fixe-se $\delta = \dfrac{1}{n}$ e defina-se

$$A_n = \{x \in X : |x - c| < \frac{1}{n}\ \wedge |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon\}.$$

Por (5.2) sabemos que $A_n \neq \emptyset$. Escolha-se $a_n \in A_n$. Como $|a_n - c| < \frac{1}{n}$ então $a_n \xrightarrow[n]{} c$. Por outro lado, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $|f(a_n) - f(c)| \geq \varepsilon$, pelo que $f(a_n) \underset{n}{\not\longrightarrow} f(c)$. $\square$

O teorema que vamos enunciar e demonstrar a seguir é muito importante. Ele apresenta uma propriedade dos intervalos fechados limitados de $\mathbb{R}$ que nos permitirá tirar algumas conclusões sobre funções contínuas definidas nesses intervalos. Esta propriedade não é apenas característica dos intervalos fechados limitados de $\mathbb{R}$, mas dos subconjuntos fechados e limitados de $\mathbb{R}$ e a demonstração poderia ser apresentada, sem dificuldades adicionais, nesta última situação. Gostaríamos ainda de realçar que esta propriedade dos subconjuntos fechados e limitados de $\mathbb{R}$ vai ser, em anos posteriores do curso, apresentada num contexto mais geral, o dos espaços métricos, sendo a propriedade referida característica dos subconjuntos compactos.

Teorema 5.2 (de Heine-Borel) *Sejam $[a,b]$ um intervalo fechado limitado de $\mathbb{R}$ e $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de intervalos abertos tal que $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \supseteq [a,b]$. Então existe um número finito de intervalos dessa família, $I_{\alpha_1}, \ldots, I_{\alpha_n}$, tal que $\bigcup\limits_{j=1}^{n} I_{\alpha_j} \supseteq [a,b]$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que não há nenhuma subfamília finita de $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ cuja união contenha $[a,b]$ (numa linguagem mais simples, dizemos que $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é uma cobertura de $[a,b]$ que não admite nenhuma subcobertura finita). Então, ou $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2}, b]$ não é coberto por nenhuma subfamília finita de $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ pois, caso contrário, o próprio $[a,b]$ seria coberto por uma subfamília finita de $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Seja $[a_1,b_1]$ um dos intervalos nessas condições. Note-se que a amplitude de $[a_1,b_1]$ é $\frac{b-a}{2}$. Dividamos agora $[a_1,b_1]$ em dois sub-intervalos $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ e $[\frac{a_1+b_1}{2}, a_2]$, ambos de amplitude $\frac{b-a}{4}$. Os dois intervalos são cobertos por $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ e, pelo menos um deles, não é coberto por nenhuma subfamília finita de $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Chamemos-lhe $[a_2,b_2]$. Continuando o processo, construímos uma sucessão encaixada de intervalos

$$[a_0,b_0] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq \ldots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \ldots,$$

verificando:

1. $[a_0,b_0]=[a,b]$;
2. dado $m\in\mathbb{N},\ b_m-a_m=\frac{1}{2^m}(b-a)$;
3. dado $m\in\mathbb{N}_0$, $[a_{m+1},b_{m+1}]=[a_m, \frac{a_m+b_m}{2}]$ ou $[a_{m+1},b_{m+1}]=[\frac{a_m+b_m}{2}, b_m]$;
4. dado $m\in\mathbb{N}_0$, nenhuma subfamília finita de $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ cobre $[a_m,b_m]$.

Obtivemos assim duas sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ que verificam, por 3.,

$$\forall\, n\in\mathbb{N}_0 \qquad a_n\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b_n,$$

e facilmente se conclui que $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ é majorado e $\{b_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ é minorado. Sejam

$$\overline{a} = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}, \qquad \overline{b} = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Obviamente, $\overline{a} \leq \overline{b}$. Como

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad a_n \leq \overline{a} \leq \overline{b} \leq b_n,$$

então

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad \overline{b} - \overline{a} \leq b_n - a_n = \tfrac{1}{2^n}(b-a),$$

o que nos permite concluir, fazendo n tender para $+\infty$, que $\overline{b} = \overline{a}$.

Vejamos agora que chegámos a uma contradição: a família $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ cobre $[a,b]$ e $\overline{a} \in [a,b]$. Então existe $\beta \in \Lambda$ tal que $\overline{a} \in I_\beta$. Como I_β é um intervalo aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]\overline{a}-\varepsilon, \overline{a}+\varepsilon[\subseteq I_\beta$. Escolhamos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $\frac{1}{2^{n_0}}(b-a) < \varepsilon$. Como $\overline{a} \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$ então

$$\overline{a} - a_{n_0} \leq \tfrac{1}{2^{n_0}}(b-a) < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad b_{n_0} - \overline{a} \leq \tfrac{1}{2^{n_0}}(b-a) < \varepsilon.$$

Assim, $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ pode ser coberto por uma subfamília finita de $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ (aliás uma subfamília com um único elemento, I_β)!), o que é absurdo. O absurdo resultou de termos suposto que $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ não possuía nenhuma subcobertura finita. $\square$

5.2 O Teorema de Cantor e a continuidade uniforme

O Teorema de Heine-Borel permitirá concluir que uma função contínua, definida num intervalo fechado e limitado, é necessariamente uniformemente contínua.

Teorema 5.3 (de Cantor) *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Como f é contínua em $[a,b]$, fixando $\varepsilon > 0$,

$$\forall\, x \in [a,b]\ \exists\, \delta_x > 0\ \forall\, y \in [a,b] \qquad |x-y| < \delta_x \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3}$$

Como $[a,b]$ é um intervalo fechado, e como a família de intervalos abertos $\left(\left]x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2}\right[\right)_{x\in[a,b]}$ cobre $[a,b]$, existe então, pelo Teorema de Heine-Borel, uma subfamília finita, $\left\{ \left]x_1-\frac{\delta_{x_1}}{2}, x_1+\frac{\delta_{x_1}}{2}\right[, \ldots, \left]x_n-\frac{\delta_{x_n}}{2}, x_n+\frac{\delta_{x_n}}{2}\right[\right\}$, que ainda cobre $[a,b]$.

Sejam $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right\}$ e x, y dois pontos de $[a,b]$ verificando $|x-y| < \delta$. Então $x \in \left]x_j-\frac{\delta_{x_j}}{2}, x_j+\frac{\delta_{x_j}}{2}\right[$, para algum $j \in \{1,\ldots,n\}$ e, como $|y-x| < \delta$ temos que $|y-x_j| \leq |y-x|+|x-x_j| < \delta+\frac{\delta_{x_j}}{2} \leq \delta_{x_j}$. Então, se $|x-y| < \delta$ temos que $|x-x_j| < \delta_{x_j}$ e $|y-x_j| < \delta_{x_j}$, pelo que, por (5.3), se verifica que

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x_j)| + |f(x_j)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Exemplo 5.4 *A função $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \textit{se } x > 0, \\ 0 & \textit{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é uniformemente contínua.

Comecemos por observar que a função f é contínua:

- a função $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é contínua em $]0, \frac{\pi}{2}[$, por ser a composta de funções contínuas e $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é contínua por ser o produto de funções contínuas;
- a função constante igual a zero é contínua em $]-\frac{\pi}{2}, 0[$;
- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$, uma vez que $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é uma função limitada e $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$. Além disso, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$, pelo que f é contínua em zero.

Observe-se que

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\frac{2}{\pi}, \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0.$$

Podemos então prolongar a função f continuamente ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, definindo

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{2}{\pi} & \text{se } x = \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se } x = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

A função F assim definida é contínua no intervalo fechado $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sendo então, pelo Teorema de Cantor, uniformemente contínua. Sendo f a restrição de F ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, f é também uniformemente contínua. ■

5.3 Funções contínuas em intervalos

As funções contínuas definidas em intervalos gozam de propriedades especiais, em certas situações se o intervalo for fechado limitado, noutras seja qual for o intervalo. Apresentamos de seguida alguns teoremas importantes que salientam essas propriedades.

O teorema que se segue diz-nos que uma função contínua definida num intervalo fechado tem máximo e mínimo. O Teorema de Heine-Borel e o facto de f ser contínua vão-nos permitir mostrar que $f([a,b])$ é limitado, o axioma do supremo garante-nos a existência do $\sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ e do $\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ e a continuidade da função permitir-nos-á concluir que o supremo é, na realidade, máximo e que o ínfimo é mínimo.

Teorema 5.5 (de Weierstrass) *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$\exists\, c,\, d \in [a,b]\ \forall\, x \in [a,b] \qquad f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Demonstração: Vamos mostrar que o conjunto $f([a,b])$ tem máximo, omitindo a demonstração (análoga) de que $f([a,b])$ tem mínimo.

- $f([a,b])$ é majorado

  Como f é contínua, se fixarmos $\varepsilon = 1$,

  $$\forall\, x \in [a,b]\ \exists\, \delta_x > 0\ \forall\, y \in [a,b] \qquad |y-x| < \delta_x \Longrightarrow f(y) < f(x) + 1.$$

  Uma vez que $\big(\,]x-\delta_x, x+\delta_x[\,\big)_{x\in[a,b]}$ é uma cobertura do intervalo $[a,b]$ por intervalos abertos, o Teorema de Heine-Borel garante-nos a existência de um número finito de pontos do intervalo, $x_1, \ldots, x_n$, tais que

  $$[a,b] \subseteq\,]x_1-\delta_{x_1}, x_1+\delta_{x_1}[\, \cup \ldots \cup\,]x_n-\delta_{x_n}, x_n+\delta_{x_n}[.$$

Seja $M = \max\{f(x_1)+1, \ldots, f(x_n)+1\}$. Se $y \in [a,b]$ então existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in]x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}[$, pelo que $f(y) < f(x_j) + 1 \leq M$, ou seja,

$$\forall\, y \in [a,b] \qquad f(y) \leq M.$$

- $\sup\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\} \in f([a,b])$

  Como $f([a,b])$ é um conjunto majorado, tem supremo. Chamemos M ao $\sup\ f([a,b])$. Pretende-se mostrar que existe $c \in\ [a,b]$ tal que $f(c) = M$. Por definição de supremo,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, y_n \in\ f([a,b]) : \qquad M - \frac{1}{n} < y_n.$$

  Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in\ [a,b]$ tal que $f(x_n) = y_n$. A sucessão $(x_n)_n$ é limitada. Pelo Teorema 2.38, $(x_n)_n$ tem uma sucessão parcial monótona, que designaremos por $(x_{\varphi(n)})_n$. Então, por ser monótona e limitada, aplicando o Teorema 2.27, a sucessão $(x_{\varphi(n)})_n$ converge para algum $c \in\ [a,b]$. Como f é contínua, pelo Teorema 5.1, $(f(x_{\varphi(n)}))_n$ converge para $f(c)$. Mas, como

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad M - \frac{1}{\varphi(n)} < f(x_{\varphi(n)}) \leq M,$$

  fazendo $n \longrightarrow +\infty$, conclui-se que $M \leq f(c) \leq M$, isto é, o supremo de $f([a,b])$ é máximo. $\square$

Exemplo 5.6 *Seja* $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por* $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

A função f é contínua e, no entanto não existe $\max\limits_{x\in]0,1]} \{f(x)\}$. O Teorema de Weierstrass não é contrariado por este exemplo, visto que o domínio de f não é um intervalo fechado.

$\blacksquare$

Exemplo 5.7 *Seja* $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0, \\ 0 & \textit{se } x = 0. \end{cases}$$

Não existe $\max\limits_{x\in[-1,1]}\{f(x)\}$ pois $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. O Teorema de Weierstrass não é contrariado por este exemplo, visto que f é descontínua. ■

O teorema seguinte, apresentado aqui como o Teorema de Bolzano-Cauchy, é também conhecido como o Teorema do Valor Intermédio, pois estabelece que, se f é uma função contínua definida no intervalo $[a,b]$ então todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ são atingidos.

Teorema 5.8 (de Bolzano-Cauchy) *Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f([a,b])$ contém o intervalo fechado de extremos $f(a)$ e $f(b)$.*

Demonstração: Se $a=b$, nada há a provar. Seja então $a<b$. Se $f(a)=f(b)$ também nada temos que mostrar. Suponhamos então que $f(a)\neq f(b)$ e façamos a demonstração apenas no caso em que $f(a)<f(b)$.

Seja $d\in\,]f(a),f(b)[$. Pretendemos mostrar que existe $c\in\,]a,b[$ tal que $f(c)=d$. Defina-se

$$A=\{t\in[a,b]:\forall\,x\in[a,t]\quad f(x)\le d\}.$$

É evidente que $a\in A$ e que A é um intervalo (limitado). Seja $c=\sup\ A$. Vamos verificar que $f(c)=d$. Comecemos por observar que $a<c<b$. Como $[a,c[\,\subseteq A$ e f é contínua em c, então , pela Proposição 3.39, $f(c)=\lim\limits_{x\to c^-} f(x)\le d$. Então $c\in A$, pelo que $A=[a,c]$, com $a<c<b$. Suponhamos, por absurdo, que $f(c)<d$. Fixemos então $\varepsilon=\frac{d-f(c)}{2}$. Para este ε, existe $\delta>0$ tal que $\delta<\min\{c-a,b-c\}$ e

$$x\in\,]c-\delta,c+\delta[\implies|f(x)-f(c)|<\varepsilon,$$

concluindo-se então que

$$x\in\,]c-\delta,c+\delta[\implies f(x)<f(c)+\frac{d-f(c)}{2}=\frac{f(c)+d}{2}<d.$$

Então $[a,c+\delta[$ estaria contido em A, o que é absurdo, visto que c é o supremo de A. O absurdo resultou de termos suposto que $f(c)$ era menor que d. Então $f(c)=d$. □

Exemplo 5.9 *A função* $\begin{array}{rccc} g: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2}{1+x^4}\end{array}$ *é tal que* $g([0,1])\supseteq[1,2]$.

De facto, g é contínua, $g(0) = 2$ e $g(1) = 1$, pelo que, aplicando o Teorema de Bolzano--Cauchy, podemos afirmar que $g([0,1]) \supseteq [g(1), g(0)] = [1,2]$. ■

Exemplo 5.10 *A imagem por* $f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases} \end{array}$ *do intervalo* $[0,1]$ *é o conjunto* $\{0,1\}$*, o que mostra que o Teorema de Bolzano-Cauchy não se verifica se a função não for contínua.* ■

Corolário 5.11 *Sejam* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então* $f(I)$ *é um intervalo.*

Demonstração: Para mostrarmos que $f(I)$ é um intervalo temos de mostrar que, dados $c, d \in f(I)$, $c \leq d$, então $[c,d] \subseteq f(I)$.

Sejam $c, d \in f(I)$, $c \leq d$ e $a, b \in I$ tais que $f(a) = c$ e $f(b) = d$. Vamos supor que $a \leq b$ (o outro caso é análogo). Como $[a,b] \subseteq I$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $[c,d] = [f(a), f(b)] \subseteq f([a,b]) \subseteq f(I)$. □

Nota 5.12 *Do corolário anterior deduz-se facilmente que se* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua tal que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ *e* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \beta$ *então* $f(\mathbb{R})$ *contém todos os valores entre* α *e* β*, sendo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. ■

Exemplo 5.13 *A função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = -x^3 + 1$ *é sobrejectiva.*

Basta notar que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Então f toma todos os valores entre $-\infty$ e $+\infty$, isto é, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. ■

Corolário 5.14 *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua e suponhamos que* $f(a)f(b) < 0$*. Então existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demonstração: Como $f(a)f(b) < 0$, sabemos que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários. Em particular, $f(a) \neq f(b)$. Suponhamos que $f(a) < f(b)$ (o outro caso demonstra-se de forma análoga). Como $0 \in [f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$, pelo corolário anterior, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$. □

Teorema 5.15 *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva. Então f é estritamente monótona.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que f não é estritamente monótona. Então existem $a, b, c \in I$, com $a < b < c$ tais que acontece um dos dois casos seguintes:

i) $f(a) < f(c)$ e $f(b) \notin [f(a), f(c)]$; ii) $f(a) > f(c)$ e $f(b) \notin [f(c), f(a)]$.

Uma vez que a demonstração em ambos casos é análoga, apresentamos aqui apenas o caso i).

O caso i) subdivide-se ainda em dois casos:

a) $f(a) < f(c)$ e $f(b) < f(a)$; b) $f(a) < f(c)$ e $f(b) > f(c)$.

No caso a), se aplicarmos o Teorema de Bolzano-Cauchy a $f_{|_{[b,c]}}$, como $f(a) \in]f(b), f(c)[$, existe $d \in]b, c[$ tal que $f(d) = f(a)$, sendo, obviamente, $d \neq a$. Então f não é injectiva, o que é absurdo.

Vejamos que se chega, de igual modo, a absurdo no caso b). Apliquemos agora o Teorema de Bolzano-Cauchy a $f_{|_{[a,b]}}$. Como $f(c) \in]f(a), f(b)[$, existe $d \in]a, b[$ tal que $f(d) = f(c)$ e, no entanto $d \neq c$. Então f não é injectiva, o que absurdo.

Provámos assim que o caso i) não pode acontecer. Analogamente chegaríamos a absurdo no caso ii), resultando o absurdo de termos suposto que f não era estritamente monótona. Então f é estritamente monótona. $\square$

Teorema 5.16 *Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow J$ uma função bijectiva e contínua. Então f^{-1} é contínua.*

Demonstração: Como f é contínua e injectiva, f é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Suponhamos então que f é estritamente crescente (o caso em que f é estritamente decrescente demonstra-se de forma análoga). Observe-se que f^{-1} é também estritamente crescente. Denotemos f^{-1} por g. Queremos mostrar que

$$\forall\, d \in J\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, d' \in J \qquad |d - d'| < \delta \Longrightarrow |g(d) - g(d')| < \varepsilon.$$

Consideremos dois casos:

- $d \in \overset{\circ}{J}$

  Sejam $\varepsilon > 0$ e $c = g(d)$. Tomem-se $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' \leq \varepsilon$ e $]c - \varepsilon', c + \varepsilon'[\subseteq I$ e $\delta = \min\{f(c) - f(c - \varepsilon'), f(c + \varepsilon') - f(c)\}$. Observe-se que $\delta > 0$ e se $f(c) - \delta <$

$d' < f(c) + \delta$ então $f(c-\varepsilon') \leq f(c) - \delta < d' < f(c) + \delta \leq f(c+\varepsilon')$, donde, como f^{-1} é estritamente crescente, se conclui que

$$g(d) - \varepsilon \leq g(d) - \varepsilon' = g(f(c-\varepsilon')) < g(d') < g(f(c+\varepsilon')) = g(d) + \varepsilon' \leq g(d) + \varepsilon.$$

- $d \in J \setminus \overset{\circ}{J}$ (note-se que $J \setminus \overset{\circ}{J}$ pode ser $\emptyset$)

  A demonstração, neste caso, é deixada a cargo do leitor. □

Exemplo 5.17 *Para realçar a importância das hipóteses do Teorema 5.16, apresenta-se um exemplo de uma função, $f : [0,1[\cup [2,3] \longrightarrow [0,2]$, contínua e bijectiva, cuja inversa é descontínua.*

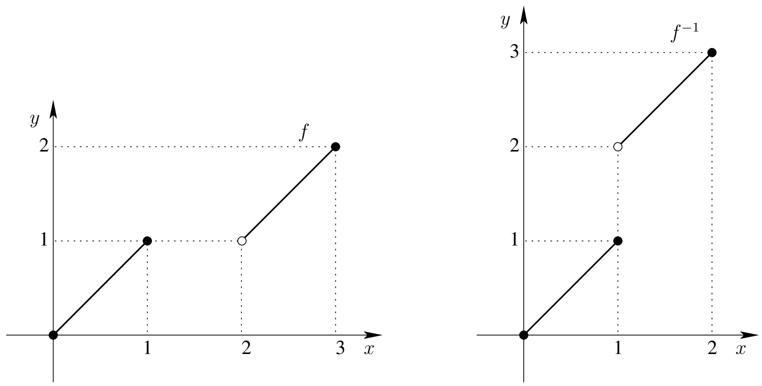


Figura 5.1: Função contínua com inversa descontínua.

■

Exemplo 5.18 *Se $n \in \mathbb{N}$, a função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$ *é bijectiva e contínua. Então, pelo teorema anterior,* $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$ *é uma função contínua.* ■

Exemplo 5.19 *Seja $n \in \mathbb{N}$ um número ímpar. Como a função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$ *é bijectiva e contínua então, pelo teorema anterior,* $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$ *é uma função contínua.*

Note-se que se $n \in \mathbb{N}$ é um número par então a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ não é injectiva, pelo que não é invertível. ■

Exemplo 5.20 *Dado $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, a função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log_a x \end{array}$ *é contínua, por ser a inversa da função exponencial de base a, que é contínua.* ■

5.4 Exercícios resolvidos

Exercício resolvido 5.1 Seja $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existem e são finitos $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Mostre que f é uniformemente contínua (chamamos a atenção do aluno para o Exemplo 5.4).

Resolução: Considere-se a função
$$\begin{array}{rccl} F: & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]a, b[\\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & \text{se } x = a \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) & \text{se } x = b \end{cases} \end{array}.$$
A função F é um prolongamento contínuo de f ao intervalo fechado $[a, b]$. Pelo Teorema de Cantor, F é uniformemente contínua. Então $f = F_{|]a,b[}$ é também uniformemente contínua. ■

Exercício resolvido 5.2 Sejam n um número natural ímpar e

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

Mostre que P tem pelo menos um zero.

Resolução:

Vejamos que $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. De facto,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = +\infty.1 = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = -\infty.1 = -\infty.$$

Então $P(\mathbb{R})$ contém o intervalo $]-\infty,+\infty[$ (ver Nota 5.12), isto é $P(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, pelo que existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $P(c)=0$. ■

Exercício resolvido 5.3 Sejam n um número natural par e

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \qquad a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}.$$

Mostre que P tem mínimo absoluto.

Resolução:

Como n é par, facilmente se verifica que $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=+\infty$ (ver a resolução do exercício anterior). Por definição de limite quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$,

$$\exists\, N>0 \qquad |x|\geq N \Longrightarrow P(x)\geq P(0).$$

A função $P_{|_{[-N,N]}}$ é uma função contínua, definida num intervalo fechado. Então existe $\min\limits_{x\in[-N,\,N]}\{P(x)\}=m\leq P(0)$.

Como, dado x tal que $|x|\geq N$, se tem $P(x)\geq P(0)$, m é o mínimo absoluto da função P. ■

Exercício resolvido 5.4 Seja $g:[-2,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua. O que pode dizer sobre o número de zeros de g sabendo apenas que $g(-2)=\frac{1}{2}$, $g(-1)=-1$, $g(0)=2$, $g(1)=1$, $g(2)=-2$, $g(3)=\frac{5}{2}$?

Resolução:

A função g é contínua e muda de sinal nos extremos dos intervalos $[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[1,2]$ e $[2,3]$. Podemos então afirmar que g se anula em pelo menos quatro pontos, $x_1\in\,]-2,-1[$, $x_2\in\,]-1,0[$, $x_3\in\,]1,2[$ e $x_4\in\,]2,3[$, não sendo possível afirmar mais nada sobre o número de zeros de g. ■

Exercício resolvido 5.5 Considere duas funções $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, contínuas, tais que $f(a)<g(a)$ e $f(b)>g(b)$. Mostre que existe $x\in\,]a,b[$ tal que $f(x)=g(x)$.

Resolução:

Seja $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por $F(x)=f(x)-g(x)$. Note-se que F é contínua, $F(a)=f(a)-g(a)<0$ e $F(b)=f(b)-g(b)>0$. Então, por um dos corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in]a, b[$ tal que $F(c) = 0$ ou, equivalentemente, tal que $f(c) = g(c)$. ■

Exercício resolvido 5.6 Mostre que a função $f(x) = x^3 + 2x + 1$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ mas é-o em $[2, 5]$.

Resolução: Para verificar que f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, temos de verificar que

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x, y \in \mathbb{R} \qquad |x - y| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Escolha-se $\varepsilon = \frac{3}{2}$ (a escolha poderia recair sobre um qualquer número positivo).

- Dado $0 < \delta \leq 1$, sejam $x = \frac{1}{\delta}$ e $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Então $|x - y| = \frac{\delta}{2}$ e

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x - y||x^2 + xy + y^2 + 2| \\ &= \frac{\delta}{2}\left[\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 + 2\right] \\ &\geq \frac{3}{2\delta} \geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

- Dado $\delta > 1$, tomando $x = 0$ e $y = 1$, tem-se que $|x - y| = 1 < \delta$ e

$$|f(x) - f(y)| = 3 > \frac{3}{2}.$$

Como a restrição de f ao intervalo $[2, 5]$ é obviamente contínua, por aplicação do Teorema de Cantor, concluímos que $f_{|_{[2,5]}}$ é uniformemente contínua. ■

Exercício resolvido 5.7 Diga se são ou não verdadeiras as seguintes afirmações, justificando:

a) se $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então é limitada;

b) uma função $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada possui máximo;

c) se $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tal que $0 \leq f(x) \leq 2$ para todo o $[0, 1]$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 2c$.

Resolução:

a) A afirmação é **verdadeira**. De facto, se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = M$ e $\min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = m$. Então, por definição de máximo e de mínimo de uma função, tem-se que

$$\forall x \in [0,1] \qquad m \leq f(x) \leq M,$$

isto é, a função f é limitada.

b) A afirmação é **falsa**. Seja $\begin{array}{rccc} f: & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$. A função f é contínua e $f([0,1[) = [0,1[$, logo f é limitada mas não possui máximo.

c) A afirmação é **verdadeira**. Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $0 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [0,1]$. Seja $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - 2x$. Então g é contínua e $g(0) = f(0) - 2\cdot 0 \geq 0$ e $g(1) = f(1) - 2\cdot 1 \leq 2 - 2 = 0$. Assim, $0 \in \operatorname{Im} g$, isto é, existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$ ou, equivalentemente, tal que $f(c) = 2c$. ■

5.5 Exercícios propostos

Exercício 5.1 Dada uma função f contínua no intervalo $[a,b]$, tal que $f(a) < a$ e $f(b) > b$, mostre que existem $x_1,\ x_2 \in]a,b[$ tal que $f(x_1) = a$ e $f(x_2) = b$.

Exercício 5.2 Um zero de uma função f diz-se isolado, se existir um intervalo $[a,b]$ tal que $x_1 \in]a,b[$ é um zero de f e $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b] \setminus \{x_1\}$. Isole cada um dos quatro zeros de cada uma das seguintes funções:

a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8$;

b) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$.

Exercício 5.3 Mostre que existe algum número real x tal que:

a) $x^{179} + \dfrac{164}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$;

b) $\operatorname{sen} x = 1 - x$.

Exercício 5.4

a) Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f([a,b]) \subseteq [a,b]$. Mostre que f possui um *ponto fixo*, i.e., $\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = x_0$.

b) Dê exemplo de uma função contínua, $g : [0,1[\longrightarrow [0,1[$, sem ponto fixo.

Exercício 5.5 Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que $\min\limits_{x \in [0,1]} \{f^2(x)\} = 0$.

Exercício 5.6 Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, tendo a_0 e a_n sinais contrários. Mostre que existe $x > 0$ tal que $f(x) = 0$.

Exercício 5.7 Seja $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinómio, m um inteiro positivo par, $a_m < 0$, $a_0 > 0$. Mostre P tem pelo menos dois zeros.

Exercício 5.8 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

a) Mostre que f é limitada.

b) Mostre que f é uniformemente contínua.

Exercício 5.9 Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe uma função:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(\mathbb{R}) = \{1,2\}$;

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(\mathbb{R}) = [0,1]$;

c) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e sobrejectiva;

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e f não seja sobrejectiva;

e) $f : X \longrightarrow Y$, bijectiva, contínua, tal que $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ não seja contínua;

f) $f : X \longrightarrow Y$, bijectiva, não contínua, tal que $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ seja contínua;

g) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{x \in \mathbb{R} : f \text{ é contínua em } x\} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$;

h) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua mas não uniformemente contínua, sendo I um intervalo limitado de $\mathbb{R}$;

i) $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, contínua mas não uniformemente contínua, tal que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$;

j) $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, limitada, mas não uniformemente contínua.

Exercício 5.10 Diga se são ou não verdadeiras as seguintes afirmações, justificando:

a) se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(x) \neq 0, \forall x \in X$, então $f(x)f(y) > 0$, quaisquer que sejam $x, y \in X$;

b) se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall x, y \in X \qquad |x-y| < \frac{1}{m} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n},$$

então f é uniformemente contínua;

c) a função $f :]\pi, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é uniformemente contínua;

d) se $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, tal que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(0)$, então f é uniformemente contínua;

e) uma função $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não nula e contínua possui um número finito de zeros;

f) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então f atinge um máximo e um mínimo;

g) se uma função f não é contínua em $]0,3[$, então não é uniformemente contínua em $[1,2]$;

h) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $g :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x) = f(x),\ \forall x \in]0,1[$ é uma função uniformemente contínua;

i) se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = \dfrac{f(0) + 2f(1)}{3}$.

Exercício 5.11 Considere a função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, tal que

$$\forall x \in\ [a,b]\ \exists y \in [a,b] : |f(y)| \leq \frac{|f(x)|}{2}.$$

Mostre que $\exists\, z \in [a,b] : f(z) = 0$.

Exercício 5.12 Mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que

$$\forall\, y \in\ \operatorname{Im} f \qquad \operatorname{card}(f^{-1}(y)) = 2.$$

6. Derivadas

Todo o conhecimento humano
começa com intuições
prossegue então com conceitos
e termina com ideias.
(Emmanual Kant)

Este capítulo é dedicado ao estudo da derivada de uma função. Introduziremos o conceito de derivada de uma função num ponto de acumulação do domínio. Serão estudadas algumas propriedades das derivadas e tirar-se-ão conclusões sobre o comportamento de uma função através do estudo das suas derivadas de primeira ordem ou de ordens superiores.

6.1 O conceito de derivada

Já é do conhecimento dos alunos o conceito de taxa de variação média, utilizado no Ensino Secundário, nas disciplinas de Matemática e de Física.

Definição 6.1 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. A* **taxa de variação média de f no intervalo $[a,b]$** *é o número real*

$$TVM_{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

É evidente que a taxa de variação média de uma função no intervalo $[a,b]$ é o declive da recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Se fixarmos um ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de f e considerarmos as taxas de variação média $TVM_{[x_0,x]}$ ou $TVM_{[x,x_0]}$ quando x se aproxima de x_0 estamos a encontrar, para cada x, o declive da recta secante ao gráfico de f, passando nos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

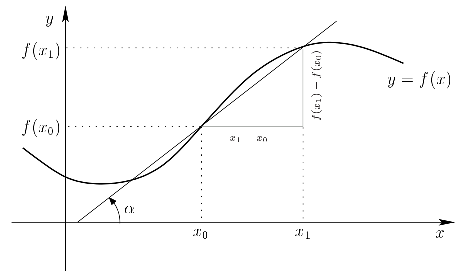


Figura 6.1: Interpretação geométrica da $TVM_{[x_0,x_1]}$.

Dado um ponto $x_0 \in]a, b[$, pode acontecer que exista $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0^+} TVM_{[x_0,x]} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} TVM_{[x,x_0]} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d.$$

Teremos então encontrado o declive da recta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$, visto que o "limite" das rectas secantes ao gráfico de f nesse ponto será a recta tangente nesse ponto.

Definição 6.2 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se* **derivável em x_0** $\in X \cap X'$ *se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$. Ao valor real d chama-se* **derivada de f em x_0** *e escreve-se $f'(x_0) = d$ ou $Df(x_0) = d$.*

Nota 6.3

1. *Observe-se que, considerando h tal que $x_0 + h \in \operatorname{Dom} f$, e fazendo a mudança de variável $x = x_0 + h$, obtemos que*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2. *Dizer que* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é derivável em* a *é dizer que existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d$, *o que é equivalente a dizer que* $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d$. *Introduziremos mais à frente os conceitos de derivada à esquerda e de derivada à direita de uma função num ponto (ver Definição 6.18). Fica apenas registada a observação que a derivada de* f *em* a *é a derivada à direita de* f *em* a*, pelo facto de não haver pontos do domínio de* f *à esquerda de* a *e a derivada de* f *em* b *é a derivada à esquerda de* f *em* b*, por não haver pontos do domínio de* f *à direita de* b.

3. *Utilizando as definições de limite e de derivada num ponto, verifica-se que* $f'(x_0) = d$ *se e só se*

   $$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in X\backslash\{x_0\} \quad |x-x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)-d(x-x_0)| < \varepsilon|x-x_0|.$$

   Esta observação pode ser ilustrada pela figura abaixo: uma função f *é derivável em* x_0 *se, para todo o* $\varepsilon > 0$*, existir um* $\delta > 0$ *de tal modo que o gráfico de* f*, para pontos de* $\mathrm{Dom}\, f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$ *está contido nos triângulos representados a cinzento na figura, limitados pelas duas rectas que passam no ponto* $(x_0, f(x_0))$ *e têm declive, respectivamente,* $d+\varepsilon$ *e* $d-\varepsilon$ *e pelas rectas de equação* $x = x_0 - \delta$ *e* $x = x_0 + \delta$.

■

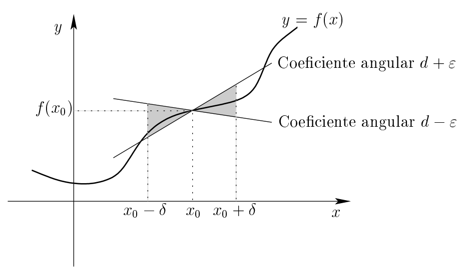


Figura 6.2: Interpretação geométrica da definição de derivada de f em x_0.

Exemplo 6.4 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$ *A função* f *é derivável em* $x = 0$ *e* $f'(0) = 1$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \qquad \blacksquare$$

Já anteriormente observámos que, se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável em $c \in X \cap X'$, $f'(c)$ representa o declive da recta tangente ao gráfico de f em $x = c$, o que justifica a definição seguinte.

Definição 6.5 *Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em $c \in X \cap X'$, a recta de equação $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ designa-se por* **recta tangente ao gráfico de f** *em $(c, f(c))$.*

Exemplo 6.6 *A recta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$, em $(3, 3)$ é a recta de equação $y = 2x - 3$.*

Verifique que $f'(3) = 2$, logo a equação da recta tangente é $y - 3 = 2(x - 3)$. $\blacksquare$

Definição 6.7 *Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em $c \in X \cap X'$, chama-se* **recta normal ao gráfico de f** *em $(c, f(c))$ à recta perpendicular à recta tangente ao gráfico de f nesse ponto.*

Exemplo 6.8 *A recta normal ao gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$, em $(3, 3)$, é a recta de equação $y = \frac{9-x}{2}$.*

Já vimos que a recta tangente ao gráfico desta função no ponto $(3, 3)$ tem declive $m = 2$. Então qualquer recta perpendicular a esta tem declive $m' = -\frac{1}{2}$ e equação cartesiana $y = -\frac{1}{2}\,x + b$. Como queremos que a recta passe no ponto $(3, 3)$, temos que $3 = -\frac{1}{2}\,3 + b$, pelo que a recta normal ao gráfico de f em $(3, 3)$ é a recta de equação $y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{9}{2}$. $\blacksquare$

Definição 6.9 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se* **derivável** *se f for derivável em todos os pontos de X. A função*
$$\begin{array}{rccc} f' : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$
diz-se a **função derivada de f**.

Nota 6.10 *Se uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável, então todos os pontos do domínio de f são pontos de acumulação.* $\blacksquare$

Exemplo 6.11 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a \end{array}$*, constante igual a a, é derivável e a sua derivada é a função nula.*

Como, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{a-a}{x-x_0} = 0$, conclui-se que f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$. ∎

Exemplo 6.12 *Dados a, b números reais, a função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$ *é derivável e a sua derivada é a função constante igual a a.*

Visto que, se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} a = a$, então f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = a$. ∎

Exemplo 6.13 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *é derivável e* $\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & 2x \end{array}$

Fixando $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x+x_0) = 2x_0.$$

∎

Exemplo 6.14 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$ *é derivável e* $\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$

Fixe-se $x_0 \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen}\, x - \operatorname{sen}\, x_0}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{2\ \operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2}\ \cos \frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \lim_{x\to x_0} \cos \frac{x+x_0}{2} = \cos\, x_0. \end{aligned}$$

∎

Exemplo 6.15 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$ *é derivável e* $\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$

Fixando $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} \\ &= e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} - 1}{h} \\ &= e^{x_0} \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}. \end{aligned}$$

A função $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$, sendo $x \in \mathbb{R}$, é contínua (ver Capítulo 4), pelo que $\lim_{h\to 0} g(h) = g(0) = 1$. Então

$$f'(x_0) = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^{x_0} g(0) = e^{x_0}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 6.16 *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in X \cap X'$. Se f é derivável em x_0 então f é contínua em x_0.*

Demonstração: Considerem-se as funções

$$\begin{array}{rrcl} g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{se } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{se } x = x_0 \end{cases} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rrcl} h: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & x - x_0 \end{array}$$

As funções são ambas contínuas em x_0, pelo que gh, por ser o produto de duas funções contínuas em x_0, é contínua em x_0. Mas

$$\forall\, x \in X \quad g(x)h(x) = f(x) - f(x_0),$$

pelo que, como

$$\forall\, x \in X \quad f(x) = f(x_0) + g(x)h(x),$$

concluímos que f é contínua em x_0. $\square$

Corolário 6.17 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então f é contínua.*

Demonstração: É uma consequência imediata do teorema anterior. $\square$

Definição 6.18 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se*

- **derivável à direita em $\boldsymbol{x_0}$** $\in X \cap X'_+$ *se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que* $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$.

  Ao valor real d chama-se **derivada à direita de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{x_0}$** *e escreve-se $f'(x_0^+) = d$ ou $Df(x_0^+) = d$;*

- **derivável à esquerda em $\boldsymbol{x_0}$** $\in X \cap X'_-$ *se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que* $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$.

  Ao valor real d chama-se **derivada à esquerda de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{x_0}$** *e escreve-se $f'(x_0^-) = d$ ou $Df(x_0^-) = d$.*

Proposição 6.19 *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Então*

$$f \text{ derivável em } x_0 \iff \begin{array}{l} \text{existem } f'(x_0^+) \text{ e } f'(x_0^-) \\ \text{e} \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-). \end{array}$$

Demonstração: A demonstração é uma consequência imediata das definições. $\square$

Exemplo 6.20 *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ tem derivada à direita e à esquerda em zero, mas não tem derivada em zero.*

De facto,

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

e

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} = 1.$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, conclui-se que não existe $f'(0)$. $\blacksquare$

6.2 Alguns exemplos

À semelhança do que já fizemos em relação à continuidade, vamos agora apresentar alguns exemplos de funções com derivada em alguns pontos. As funções apresentadas no Capítulo 3 para exemplificar funções descontínuas num ponto, em dois pontos, num conjunto numerável de pontos, em todos os pontos, etc., foram seleccionadas de tal modo que, elas próprias, são funções deriváveis em apenas um ponto, dois pontos, num conjunto numerável, em nenhum ponto...

Apresenta-se aqui a definição de cada uma das funções, remetendo-se o leitor interessado no esboço dos seus gráfico para o Capítulo 3.

Exemplo 6.21 *A função*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

(ver Exemplo 3.48) é derivável apenas no ponto $x = 0$. ■

Exemplo 6.22 *A função*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1+(x-1)^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}^+ \\ 1-(x+1)^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}^- \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

(ver Exemplo 3.49) é derivável apenas em $x = -1$ e $x = 1$. ■

Exemplo 6.23 *A função*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

(ver Exemplo 3.50) é derivável apenas em $\mathbb{Z}$. ■

Exemplo 6.24 *A função*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array},$$

em que $[x]$ representa a característica ou parte inteira de x (ver Exemplo 3.51), é derivável em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Observe-se que, dado $n \in \mathbb{Z}$, $f'(n^+) = 0$ e $f'(n^-)$ não existe pois

$$\lim_{\substack{h \to 0^- \\ -1 < h < 0}} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(n-1) - n}{h} = +\infty.$$

■

Exemplo 6.25 *A função*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

(ver Exemplo 3.52) não é derivável em nenhum ponto, pois é descontínua em todos os pontos. ■

Nota 6.26 *Uma questão mais interessante é saber se existe alguma função contínua mas não derivável em nenhum ponto. Esta questão tem resposta afirmativa e, surpreendentemente, o conjunto das funções definidas num intervalo, contínuas e não deriváveis em nenhum ponto, é "maior", num sentido topológico que não podemos precisar nestas notas, que o conjunto das funções deriváveis em algum ponto.* ■

6.3 Regras de derivação

Nesta secção vamos fazer a demonstração de algumas regras de derivação, já conhecidas e utilizadas pelos alunos anteriormente.

Proposição 6.27 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $x_0 \in X \cap X'$. Então:*

1. *$f + g$ é derivável em x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;*
2. *dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λf é derivável em x_0 e $(\lambda f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0)$;*

3. *fg é derivável em x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;*

4. *se $g(x_0) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ é derivável em x_0 e $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.*

Demonstração:

1. Vejamos que existe a derivada de $f + g$ no ponto x_0. De facto,

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)+g(x)] - [f(x_0)+g(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

2. A demonstração é muito simples, sendo por isso omitida.

3. Vamos mostrar que existe a derivada de fg em x_0, utilizando a definição. Note-se que f e g, por serem deriváveis em x_0, são contínuas em x_0.

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)-f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)-f(x_0)]g(x)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

4. Como g é derivável em x_0 então g é contínua em x_0. Como, por hipótese, $g(x_0) \neq 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ em $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X$, estando então a função $\dfrac{f}{g}$ definida neste conjunto. Para calcular a derivada do quociente de duas

funções num ponto, procede-se de modo análogo ao utilizado para o cálculo da derivada do produto.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{[f(x)-f(x_0)]g(x_0)-f(x_0)[g(x)-g(x_0)]}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{[f(x)-f(x_0)]g(x_0)}{x-x_0} \\
&\quad - \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x_0)[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} \\
&= \frac{1}{g(x_0)^2} f'(x_0)g(x_0) - \frac{1}{g(x_0)^2} f(x_0)g'(x_0) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 6.28

1. *Dado $n \in \mathbb{N}$, $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.*

   Façamos a demonstração por indução sobre $n \in \mathbb{N}$: para $n = 2$, aplicando a regra de derivação do produto de duas funções, $(x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$; supondo mostrado que $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, utilizando a hipótese de indução e a regra de derivação do produto de funções ,

   $$\left(x^{n+1}\right) = (x^n \cdot x) = n\,x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n,$$

   o que conclui a demonstração.

2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, $\left(x^{-n}\right)' = -n\,x^{-n-1}$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Como $\left(x^{-n}\right) = \dfrac{1}{x^n}$, *utilizando a regra de derivação do quociente de funções e a alínea anterior, obtém-se*

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n\, x^{n-1}}{\left(x^n\right)^2} = -n\, x^{-n-1}.$$

■

Teorema 6.29 *Sejam* X, Y *subconjuntos de* $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções,* $c \in X \cap X'$, $f(c) \in Y'$. *Suponhamos que* f *é derivável em* c *e que* g *é derivável em* $f(c)$. *Então* $g \circ f$ *é derivável em* c *e*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Demonstração: Considere-se a função

$$\begin{array}{rccl} h: & Y & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(f(c))}{x - f(c)} & \text{se } x \neq f(c) \\ g'(f(c)) & \text{se } x = f(c) \end{cases} \end{array}$$

Como g é derivável em $f(c)$ então h é contínua em $f(c)$, pelo que $h \circ f$ é contínua em c. Explicitemos $h \circ f$:

$$\begin{array}{rccl} h \circ f: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x) - f(c)} & \text{se } f(x) \neq f(c) \\ g'(f(c)) & \text{se } f(x) = f(c) \end{cases} \end{array}$$

Consideremos agora a função

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{se } x \neq c \\ f'(c) & \text{se } x = c \end{cases} \end{array}$$

Esta função é contínua em c, visto que f é derivável em c. Então $(h \circ f)\alpha$ é contínua em c.

$$\begin{array}{rccl} (h\circ f)\alpha: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{g(f(x))-g(f(c))}{x-c} & \text{se } x\neq c \\ g'(f(c))f'(c) & \text{se } x=c \end{cases} \end{array}$$

(observe que se $x \neq c$ e $f(x) = f(c)$ então $(h \circ f)\alpha(x) = 0$). Então

$$\lim_{x\to c} \frac{g(f(x))-g(f(c))}{x-c} = g'(f(c))f'(c),$$

ou seja, $g \circ f$ é derivável em c e $(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c)$. □

Teorema 6.30 *Sejam X e Y subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow Y$ uma função bijectiva e suponhamos que:*

1. *f é derivável em $c \in X \cap X'$;*

2. *$f'(c) \neq 0$;*

3. *f^{-1} é contínua em $f(c)$.*

Então f^{-1} é derivável em $f(c)$. Além disso,

$$\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Demonstração: Comecemos por observar que $f(c) \in Y \cap Y'$.

Consideremos as funções

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccl} g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{se } x\neq c \\ f'(c) & \text{se } x=c \end{cases} \end{array}$$

Sabemos que f^{-1} é contínua em $f(c)$, por hipótese, e que g é contínua em c, visto que f é derivável em c. Consideremos também $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ Obviamente, h é contínua em $f'(c)$. Então

$$\begin{array}{rccl} h \circ g \circ f^{-1}: & Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f^{-1}(x)-c}{x-f(c)} & \text{se } x \neq f(c) \\ \dfrac{1}{f'(c)} & \text{se } x = f(c) \end{cases} \end{array}$$

é contínua em $f(c)$, por ser a composta de funções contínuas nos pontos adequados, pelo que

$$\frac{1}{f'(c)} = \lim_{x\to f(c)} \frac{f^{-1}(x)-c}{x-f(c)} = \lim_{x\to f(c)} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(f(c))}{x-f(c)} = \left(f^{-1}\right)'(f(c)),$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 6.31 *A função* $\log_a$ *é derivável e* $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$.

Como $\log_a x = \log x \log_a e$, para calcular a derivada de $\log_a$ basta-nos calcular a derivada de $\log$. Chamando $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $\log x = f^{-1}(x)$. Dado um ponto $y_0 \in \operatorname{Dom} f^{-1} = \mathbb{R}^+$, f é derivável em $f^{-1}(y_0)$, $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em y_0. Então, utilizando o teorema anterior,

$$\log'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{e^{\log y_0}} = \frac{1}{y_0},$$

isto é, a função $\log$ tem derivada em qualquer ponto do domínio e $\log' x = \frac{1}{x}$, donde se conclui que $\log_a' x = \frac{1}{x}\log_a e$. ■

Exemplo 6.32 *Dado* $\alpha \in \mathbb{R}$, *tem-se* $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Como $x^\alpha = e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha \log x}$ então $(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \log x}\right)' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \log x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$. ■

Algumas regras de derivação
(entende-se que estão a ser considerados as restrições das funções ao conjunto dos pontos onde existe derivada)

$C' = 0, \quad C$ constante

$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x))$

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$(e^x)' = e^x$

$\log' x = \dfrac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \log a$

$\log_a' x = \dfrac{1}{x} \log_a e$

$\operatorname{sen}' x = \cos x$

$\cos' x = -\operatorname{sen} x$

$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$

$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\sec' x = \sec x \ \operatorname{tg} x$

$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \ \operatorname{cotg} x$

$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$

$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$

$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x$

$\operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$

$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \ \operatorname{th} x$

$\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \ \operatorname{coth} x$

$\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\text{arctg}'x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{arcotg}'x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{arcsec}'x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{arcosec}'x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{argsh}'x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{argch}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{argth}'x = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{argcoth}'x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\text{argsech}'x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{argcosech}'x = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

6.4 Alguns teoremas envolvendo derivadas

Nesta secção, à semelhança do que já fizemos no Capítulo 5, vamos apresentar e demonstrar alguns teoremas importantes, utilizando agora o conhecimento adicional que possuímos sobre derivadas. Em particular, iremos ver uma condição necessária para um ponto ser de extremo de uma função definida num intervalo aberto.

Teorema 6.33 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $c \in X \cap X'_- \cap X'_+$ e tal que $f'(c) \neq 0$.*

Então ,

$$f'(c) > 0 \Longrightarrow \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in X \cap]c-\delta, c[\quad \forall\, y \in X \cap]c, c+\delta[\qquad f(x) < f(c) < f(y),$$

$$f'(c) < 0 \Longrightarrow \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in X \cap]c-\delta, c[\quad \forall\, y \in X \cap]c, c+\delta[\qquad f(x) > f(c) > f(y).$$

Demonstração: Considere-se a função

$$\begin{array}{rccl} g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{se } x \neq c, \\ f'(c) & \text{se } x = c. \end{cases} \end{array}$$

Por hipótese, $g(c) \neq 0$. Vamos fazer a demonstração no caso em que $g(c) = f'(c) > 0$ (o outro caso é análogo). Pela Proposição 3.29, e como g é contínua, sabemos que

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \cap]c-\delta, c+\delta[\qquad g(x) > 0,$$

logo,

$$\forall\, x \in X \cap]c-\delta, c+\delta[\setminus \{c\} \qquad g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0.$$

Então, se $x \in]c-\delta, c[\cap X$, como $x-c < 0$, temos que $f(x) < f(c)$ e se $x \in]c, c+\delta[\cap X$, como $x - c > 0$, temos $f(x) > f(c)$. □

Teorema 6.34 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $c \in X \cap X'_- \cap X'_+$. Se c é um ponto de extremo de f então $f'(c) = 0$.*

Demonstração: O resultado é uma consequência imediata do teorema anterior. □

Teorema 6.35 (de Rolle) *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração:

Se f for constante, o resultado é óbvio. Suponhamos então que f não é constante. Temos duas possibilidades:

i) $\exists\, x \in]a, b[\quad f(x) > f(a)$; ii) $\exists\, x \in]a, b[\quad f(x) < f(a)$.

Provemos o teorema no caso i), visto que o caso ii) é similar. Então, aplicando o Teorema de Weierstrass, temos que

$$\exists\, c \in [a, b] \qquad \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = f(c).$$

Obviamente $c \neq a$ e $c \neq b$, uma vez que acontece i). Como $c \in]a, b[$ e é um ponto de máximo de f, então, pelo teorema anterior, $f'(c) = 0$. □

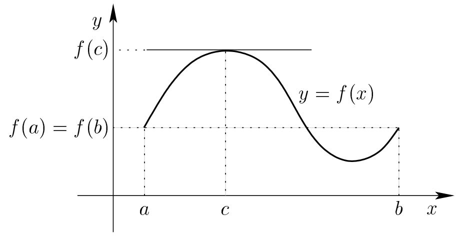


Figura 6.3: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle.

Nota 6.36 *Como consequências do Teorema de Rolle podemos referir que, se f for uma função derivável definida num intervalo, então:*

1. *entre dois zeros consecutivos de f' existe no máximo um zero de f;*

2. *entre dois zeros consecutivos de f existe pelo menos um zero de f'.*

Exemplo 6.37 *Considere-se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Então a equação $f'(x) = 0$ tem uma infinidade de soluções.*

Note-se que $f(x) = 0 \iff x = 0 \ \vee\ \operatorname{sen} x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Dado $k \in \mathbb{Z}$, seja $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$. Como $f_{|_{I_k}}$ é contínua em I_k, derivável em $\mathring{I}_k$ e $f(k\pi) = f((k+1)\pi) = 0$, pelo Teorema de Rolle, existe $c_k \in \mathring{I}_k$ tal que $f'(c_k) = 0$. Existe então uma infinidade de pontos que são solução da equação $f'(x) = 0$. ■

Teorema 6.38 (de Lagrange) *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$. Então*

$$\exists\, c \in]a, b[\qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstração:

Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} g: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\, x \end{array}$$

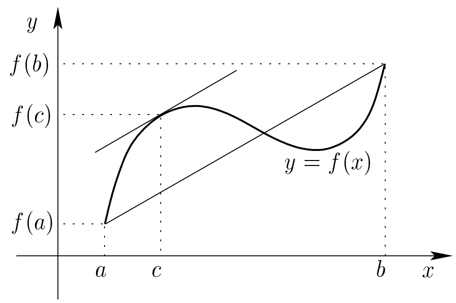


Figura 6.4: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange.

Como g é contínua em $[a,b]$, derivável em $]a,b[$ e

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} = g(b),$$

aplicando o Teorema de Rolle,

$$\exists\, c \in]a,b[\qquad g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

ou seja,

$$\exists\, c \in]a,b[\qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\square$

Exemplo 6.39 *Vejamos que* $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad e^x > x+1.$

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - x - 1$.

Seja $x > 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[0,x]}}$, que é uma função derivável. Então

$$\exists\, c_x \in]0,x[\qquad f(x) - f(0) = f'(c_x)\, x$$

ou, equivalentemente,

$$\exists\, c_x \in]0,x[\qquad e^x - x - 1 = (e^{c_x} - 1\,)\, x > 0,$$

visto que $e^{c_x} > 1$ e $x > 0$.

Seja agora $x < 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[x,0]}}$, que é também uma função derivável. Então

$$\exists\, c_x \in]x, 0[\qquad f(x) - f(0) = f'(c_x)\, x$$

ou, equivalentemente,

$$\exists\, c_x \in]x, 0[\qquad e^x - x - 1 = (e^{c_x} - 1)\, x > 0,$$

visto que $e^{c_x} < 1$ e $x < 0$. ■

Corolário 6.40 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$. Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é constante.*

Demonstração: Dado $x \in]a, b]$, podemos aplicar o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[a,x]}}$. Então

$$\exists\, c_x \in]a, x[\qquad f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como $f'(c_x) = 0$, conclui-se que $f(x) = f(a)$. Como x é um ponto arbitrário do intervalo $[a, b]$, conclui-se que f é constante. □

Corolário 6.41 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$.*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente crescente.*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente decrescente.*

Demonstração: Vamos fazer a demonstração de 1. uma vez que a de 2. é análoga.

Dados $x, y \in [a, b]$, $x < y$, a função $f_{|_{[x,y]}}$ verifica as hipóteses do Teorema de Lagrange. Então

$$\exists\, c_{xy} \in]x, y[\qquad f(y) - f(x) = f'(c_{xy})(y - x).$$

Recordando que, por hipótese, $f'(c_{xy}) > 0$, conclui-se imediatamente que $f(y) > f(x)$. □

Nota 6.42 *Os pontos de máximo ou de mínimo locais de uma função f derivável, definida num intervalo fechado $[a,b]$, estão entre os zeros da derivada de f em $]a,b[$ e os extremos a e b do intervalo. Podemos decidir se um ponto de $]a,b[$ onde a derivada de f se anula é de máximo ou de mínimo local, estudando o sinal de f' numa vizinhança desse ponto. Assim,*

- *se $c \in]a,b[$ é tal que $f'(c)=0$ e f' é positiva à esquerda de c e negativa à direita, então c é um ponto de máximo local, uma vez que f cresce à esquerda de c e decresce à direita;*
- *se $c \in]a,b[$ é tal que $f'(c)=0$ e f' é negativa à esquerda de c e positiva à direita, então c é um ponto de mínimo local, uma vez que f decresce à esquerda de c e cresce à direita;*
- *se $c \in]a,b[$ é tal que $f'(c)=0$ e f' não muda de sinal, então c não é ponto de máximo nem de mínimo local.*

Os alunos já estão habituados a utilizar tabelas para fazer o estudo da variação do sinal de f' e consequente determinação dos intervalos de monotonia de uma função. ■

Vejamos agora um exemplo onde se determinam os máximos e mínimos locais de uma função, utilizando as tabelas de variação do sinal da derivada.

Exemplo 6.43 *Estudemos os máximos e os mínimos locais de $f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$.*

A função f é derivável em $]0,2\pi[$. Então os pontos de extremo de f estão entre os zeros da derivada de f e os extremos do intervalo, 0 e 2π.

$$f'(x)=0 \iff \cos x-\operatorname{sen}x=0 \iff \operatorname{tg}x=1 \iff x=\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{5\pi}{4}.$$

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1
	Min. local		Max. local		Min. local		Max. local

Existem então dois pontos de mínimo local, $x = 0$ e $x = \frac{5\pi}{4}$ e dois pontos de máximo local, $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = 2\pi$. Os mínimos locais são então $f(0) = 1$ e $f(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$. Os máximos locais são $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ e $f(2\pi) = 1$.

Como f está definida num intervalo fechado e é contínua, sabemos que existem o máximo e o mínimo absolutos. Assim, o máximo absoluto de f é $\sqrt{2}$, atingido no ponto $x = \frac{\pi}{4}$ e o mínimo absoluto é $-\sqrt{2}$, atingido em $x = \frac{5\pi}{4}$. ■

Teorema 6.44 (de Cauchy) *Sejam* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas, deriváveis em* $]a, b[$. *Então*

$$\exists\, c \in]a, b[\qquad [f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Demonstração: Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} h: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & [g(b) - g(a)]\, f(x) - [f(b) - f(a)]\, g(x) \end{array}$$

Note-se que h é contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e que

$$h(b) = g(b)f(a) - g(a)f(b) = h(a).$$

Então, pelo Teorema de Rolle,

$$\exists\, c \in]a, b[\qquad h'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) - [f(b) - f(a)]g'(c) = 0.$$ □

Nota 6.45

1. *As demonstrações do Teorema de Lagrange e do Teorema de Cauchy aqui apresentadas utilizam o Teorema de Rolle, sendo, portanto, seus corolários;*

2. *O Teorema de Rolle resulta imediatamente do Teorema de Lagrange, pois se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *verifica as hipóteses do Teorema de Rolle, podemos aplicar a* f *o Teorema de Lagrange, concluindo que existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $0 = f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, *ou seja,* $f'(c) = 0$;

3. *O Teorema de Rolle é também consequência do Teorema de Cauchy. De facto, dado* f *nas condições do Teorema de Rolle, se escolhermos* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \dfrac{x - a}{b - a}$, *verifica-se facilmente que* f *e* g *estão nas condições do Teorema de Cauchy, pelo que existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $[g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c)$, *ou seja,* $f'(c) = 0$.

4. *Conclui-se assim que os três teoremas são equivalentes, optando-se, conforme as situações, pela utilização do que for mais conveniente.* ■

Teorema 6.46 (de Darboux) *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então*

$$f'([a,b]) \text{ contém o intervalo fechado de extremos } f'(a) \text{ e } f'(b).$$

Demonstração: Se $f'(a) = f'(b)$ nada há a provar. Suponhamos que $f'(a)$ é menor que $f'(b)$ (o outro caso trata-se de forma análoga). Seja então $d \in]f'(a), f'(b)[$. Defina-se

$$\begin{array}{rccc} g: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & f(x) - d\,x \end{array}$$

A função g é derivável. Como $g'(a) < 0$, existe $\delta_1 \in]0, b-a[$ tal que, se $x \in]a, a+\delta_1[$, então $g(x) < g(a)$. Como $g'(b) > 0$, existe $\delta_2 \in]0, b-a[$ tal que, se $x \in]b-\delta_2, b[$, então $g(x) < g(b)$. Pelo Teorema de Weierstrass, como g é contínua, existe $c \in [a,b]$ tal que $g(c) = \min\{g(x) : x \in [a,b]\}$. Pelo que foi visto, $c \neq a$ e $c \neq b$. Então $c \in]a,b[$, pelo que $g'(c) = 0$ ou, equivalentemente, $f'(c) = d$. □

Exemplo 6.47 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 2 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases} \end{array}$ *não é a derivada de nenhuma função.*

Se existisse $F : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ função derivável tal que $F' = f$ então $F'([0,2]) \supseteq [f(0), f(2)] = [1,2]$. Mas é evidente que, como f só toma os valores 1 e 2, tal não pode acontecer. ■

Corolário 6.48 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(a)f'(b) < 0$. Então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Por hipótese $f'(a)$ e $f'(b)$ têm sinais diferentes. Suponhamos que $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$ (o outro caso é análogo). Então, como $0 \in]f'(a), f'(b)[$ e, pelo Teorema de Darboux, $]f'(a), f'(b)[\subseteq f'\big(]a,b[\big)$, conclui-se que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$. □

Corolário 6.49 *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então $f'(I)$ é um intervalo.*

Demonstração: Sejam $y_1, y_2 \in f'(I)$, $y_1 < y_2$. Então existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $f'(x_1) = y_1$ e $f'(x_2) = y_2$. Vamos supôr que $x_1 < x_2$, deixando o outro caso ao cuidado do aluno. Utilizando o Teorema de Darboux, conclui-se que

$$f'(I) \supseteq f'([x_1, x_2]) \supseteq [f'(x_1), f'(x_2)] = [y_1, y_2].$$

Então $f'(I)$ é um intervalo. □

O teorema seguinte apresenta uma regra que nos vai auxiliar a levantar algumas indeterminações. Esta regra, conhecida por Regra de l'Hôpital, vai ser enunciada e demonstrada apenas para uma situação, a correspondente a uma indeterminação, no cálculo de limites, do tipo $\dfrac{0}{0}$, quando $x \to b^-$, sendo b um número real. Ela é aplicável a várias outras situações, descritas na nota que se segue ao teorema.

Teorema 6.50 (Regra de l'Hôpital) *Sejam a, b números reais, $a < b$, $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis. Seja $c \in \{a, b\}$ e suponhamos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ e que existe $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Então existe $\quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad$ *e* $\quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}.$

Demonstração: Vamos fazer a demonstração no caso em que $c = b$. O outro caso é análogo. Considere-se as funções

$$\begin{array}{rccc} F: &]a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]a, b[\\ 0 & \text{se } x = b \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} G: &]a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in]a, b[\\ 0 & \text{se } x = b \end{cases} \end{array}$$

Observe-se que F e G são funções contínuas, deriváveis em $]a, b[$. Podemos então aplicar o Teorema de Cauchy a estas funções no intervalo $[x, b]$, com $x \in]a, b[$. Temos então

$$\exists\, c_x \in]x, b[\qquad [F(b) - F(x)]G'(c_x) = [G(b) - G(x)]F'(c_x),$$

ou seja,

$$f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x), \qquad c_x \in]x, b[.$$

Então,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \qquad \text{se } g(x) \neq 0 \text{ e } g'(c_x) \neq 0.$$

Como existe $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, existe também $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ e toma o mesmo valor (recorde que o valor do limite de uma função num ponto não depende da forma como nos aproximamos do ponto). Então

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe e é igual a } \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \square$$

Nota 6.51 *A Regra de l'Hôpital é também válida:*

1. *quando se calcula o limite quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$;*
2. *considerando, no teorema anterior,*

   $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = +\infty \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = -\infty$$

   e tomando $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. ■

Apresentamos de seguida dois exemplos de aplicação da Regra de l'Hôpital.

Exemplo 6.52 *Verifiquemos, utilizando a Regra de l'Hôpital, que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (note-se que estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, quando $x \to 0$).*

As funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis. Além disso, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}' x}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$. Então existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. ■

Exemplo 6.53 *Calculemos $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.*

Comecemos por observar que $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$. Além disso, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(e^x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$. Então existe $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. ■

A Regra de l'Hôpital pode ser aplicada sucessivamente, como se pode verificar no exemplo seguinte:

Exemplo 6.54 *Dado $n \in \mathbb{N}$, calculemos* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

Note-se que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$. Então, se existir $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^n)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n\,x^{n-1}}$, também existe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n\,x^{n-1}}$. Estamos novamente perante uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, pelo que podemos aplicar novamente a Regra de l'Hôpital e, aplicando-a sucessivamente, concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n\,x^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)\cdots 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty. \qquad \blacksquare$$

Vejamos agora dois exemplos em que não é possível aplicar a Regra de l'Hôpital:

Exemplo 6.55 *Sejam*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x \,\text{sen}\, \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

e g a função identidade.

Então $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} g(x) = 0$. *Mas*

$$\lim_{x\to0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\text{sen}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}{1} \quad \textit{não existe,}$$

não nos sendo então possível aplicar a Regra de l'Hôpital.

Facilmente se verifica directamente que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \frac{x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to0} \text{sen}\,\frac{1}{x}$ *não existe.*

$\blacksquare$

Exemplo 6.56 *Sejam*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \,\text{sen}\, \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

e g a função identidade.

Então $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} g(x) = 0$. *Verifica-se que*

$$\lim_{x\to0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to0} \frac{2x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1} \quad \textit{não existe,}$$

e que

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \frac{x^2\,\text{sen}\,\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to0} x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = 0.$$

Note que, apesar de não existir $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *existe* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. *Esta observação não está em contradição com a Regra de l'Hôpital, que nos garante apenas a existência do segundo limite sempre que o primeiro existe.* ■

6.5 Derivadas de ordem superior

Nesta secção vai ser introduzido o conceito de derivada de ordem n ($n \in \mathbb{N}$) de uma função. A forma de definir a segunda, terceira, ..., n-ésima derivada de uma função num ponto surge naturalmente, ao verificarmos que muitas funções com que trabalhamos têm derivada em subconjuntos do domínio que têm um conjunto de pontos de acumulação não vazio. Quando estamos perante uma função derivável, sendo a derivada de uma função também uma função, podemos derivá-la e assim sucessivamente.

Definição 6.57 *Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $c \in X' \cap X$. *Diz-se que* f *é* **duas vezes derivável em c** , *ou que* f *tem* **derivada de 2ª ordem em c** *ou que* f *tem* **segunda derivada em c** *se*

$$\exists\, \delta > 0 \;\; g = f'_{|X\cap\,]c-\delta,c+\delta[} \text{ é derivável em } c^{1}.$$

Representa-se a segunda derivada de f *em* c *por*

$$f''(c) \text{ ou } f^{(2)}(c) \text{ ou } D^2 f(c).$$

Diz-se que f **tem derivada de 2ª ordem** *se* f *é duas vezes derivável em qualquer ponto do seu domínio (note-se que, em particular, temos que* $X \subseteq X'$*).*

À função $\begin{array}{rccc} f'' : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f''(x) \end{array}$ *chama-se* **função segunda derivada de f**.

Indutivamente define-se **derivada de ordem n de f em c** *e a* **função derivada de ordem n de f**.

Denota-se a derivada de f *de ordem* n *por* $f^{(n)}$ *ou* $D^n f$.

Convenciona-se que $f^{(0)} = f$.

---

[1] Para se definir a derivada de 2ª ordem de f em c não é necessário exigir que exista f' em $X\cap]c-\delta, c+\delta[$. Basta que f' exista num subconjunto de X do qual c seja ponto de acumulação. Optámos pela definição acima para tornar o texto mais simples.

Exemplo 6.58 *A função* $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$ *admite derivadas de todas as ordens. Mais precisamente,*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n)}(x) = e^x.$$

■

Exemplo 6.59 *A derivada de ordem* 3 *da função* $\operatorname{sen} x$ *é a função* $-\cos x$ *e a sua derivada de ordem* 12 *é a função* $\operatorname{sen} x$.

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Então $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ e $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = f(x)$. Então $f^{(12)}(x) = f^{(8)}(x) = f^{(4)}(x) = f(x)$. ■

Teorema 6.60 *Seja* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função que admite segunda derivada em* $c \in X \cap X'$. *Suponhamos que* $f'(c) = 0$. *Então, se* $f''(c) > 0$, c *é um ponto de mínimo local de* f *e se* $f''(c) < 0$, c *é um ponto de máximo local de* f.

Demonstração: Note-se que, na hipótese de $f''(c) > 0$, temos que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(c+h) - f'(c)}{h} > 0$. Então:

– se $c \in X'_+$, para $h > 0$ pequeno, temos que $f'(c+h) > f'(c) = 0$;

– se $c \in X'_-$, para $h < 0$ pequeno, temos que $f'(c+h) < f'(c) = 0$.

Numa vizinhança de c, se c é ponto de acumulação à esquerda de X, f' é negativa à esquerda de c (isto é, f decresce à esquerda de c) e, se c é ponto de acumulação à direita de X, f' é positiva à direita de c (isto é, f cresce à direita de c), o que mostra que c é um ponto de mínimo local de f.

Analogamente se prova que se $f''(c) < 0$ então c é um ponto de máximo local de f. □

Exemplo 6.61 *Se* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função que admite segunda derivada em* $c \in X \cap X'$, *tal que* $f'(c) = f''(c) = 0$, *nada se pode concluir sobre se o ponto* c *é de máximo ou mínimo local de* f.

De facto, sejam $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ e $h(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Então $x = 0$

- é um ponto de mínimo local de f e $f'(0) = f''(0) = 0$,
- é um ponto de máximo local de g e $g'(0) = g''(0) = 0$,

- não é um ponto de máximo nem de mínimo local de h e $h'(0) = h''(0) = 0$. ■

Definição 6.62 *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ tal que $X \subseteq X'$. Dado $k \in \mathbb{N}_0$, chama-se* **conjunto das funções de X em $\mathbb{R}$ deriváveis até à ordem k** *ao conjunto*

$$\mathscr{D}^k(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ é } k \text{ vezes derivável em } X\}.$$

Chama-se **conjunto das funções de X em $\mathbb{R}$ indefinidamente deriváveis** *ao conjunto*

$$\mathscr{D}^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ admite derivada de qualquer ordem em } X\}.$$

Exemplo 6.63 *A função* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$ *pertence a $\mathscr{D}^0(\mathbb{R})$ mas não pertence a $\mathscr{D}^1(\mathbb{R})$.*

A função f é contínua mas não tem derivada em $x = 0$ visto que $f'(0^+) = 1$ e $f'(0^-) = -1$. ■

Exemplo 6.64 *A função $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é indefinidamente derivável, isto é, f pertence a $\mathscr{D}^\infty(\mathbb{R})$.* ■

Definição 6.65 *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ tal que $X \subseteq X'$. Dado $k \in \mathbb{N}_0$, chama-se* **conjunto das funções de classe $\mathscr{C}^k$ de X em $\mathbb{R}$** *ao conjunto*

$$\mathscr{C}^k(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ é } k \text{ vezes derivável em } X \text{ e } f^{(k)} \text{ é contínua}\}.$$

Chama-se **conjunto das funções de classe $\mathscr{C}^\infty$ de X em $\mathbb{R}$** *ao conjunto*

$$\mathscr{C}^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ admite derivada de qualquer ordem em } X\}.$$

Exemplo 6.66 *A função exponencial* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$ *é de classe $\mathscr{C}^\infty$ (e pertence a $\mathscr{D}^\infty$).* ■

Exemplo 6.67 *A função* $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{array}$ *é de classe $\mathscr{C}^0$ (pois é contínua) mas não é de classe $\mathscr{C}^1$.*

De facto, g é derivável, sendo $g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$ mas

$$x \longmapsto \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

g' é descontínua. Observe que $g \in \mathscr{D}^1$. ■

Teorema 6.68 *Seja I um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$. Então*

$$\mathscr{D}^0(I) \supseteq \mathscr{C}^0(I) \supseteq \mathscr{D}^1(I) \supseteq \mathscr{C}^1(I) \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{D}^n(I) \supseteq \mathscr{C}^n(I) \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{D}^\infty(I) = \mathscr{C}^\infty(I),$$

sendo as inclusões estritas.

Demonstração: O conjunto $\mathscr{D}^0(I)$ coincide com o conjunto de todas as funções de I em $\mathbb{R}$ e $\mathscr{C}^0(I)$ é o conjunto das funções contínuas de I em $\mathbb{R}$. É então óbvio que $\mathscr{D}^0(I)$ contém estritamente $\mathscr{C}^0(I)$.

Os conjuntos $\mathscr{D}^\infty(I)$ e $\mathscr{C}^\infty(I)$ coincidem por definição.

Dado $n \in \mathbb{N}$, a inclusão de $\mathscr{C}^n(I)$ em $\mathscr{D}^n(I)$ é óbvia, por definição. Para mostrar que a inclusão é estrita, basta notar que, se $x_0 \in \mathring{I}$, então

$$\begin{aligned} f : \quad I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} (x - x_0)^{2n} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x - x_0} & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

é derivável até à ordem n mas $f^{(n)}$ é descontínua em $x = x_0$ (ver Exercício 6.32).

Note-se que, se uma função $f \in \mathscr{D}^{n+1}(I)$ então, como $f^{(n)}$ é derivável, $f^{(n)}$ é contínua, pelo que $f \in \mathscr{C}^n(I)$. Fica assim estabelecida a inclusão $\mathscr{D}^{n+1}(I) \subseteq \mathscr{C}^n(I)$. Para verificar que a inclusão é estrita, basta notar que, se $x_0 \in \mathring{I}$, então

$$\begin{aligned} f : \quad I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x - x_0)^n |x - x_0| \end{aligned}$$

é de classe $\mathscr{C}^n$ mas não admite derivada de ordem $n + 1$ em x_0 (ver Exercício 6.33). □

6.6 Exercícios resolvidos

Exercício resolvido 6.1 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

$$\exists\, M > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad |f'(x)| \leq M.$$

Mostre que f é uniformemente contínua.

Resolução: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, a função $f_{|_{[x,y]}}$ é contínua e derivável em $]x, y[$. Então, pelo Teorema de Lagrange,

$$\exists\, c_{xy} \qquad f(x) - f(y) = f'(c_{xy})(x - y),$$

pelo que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c_{xy})||x - y| \leq M|x - y|.$$

Observe-se que a desigualdade acima é verificada para quaisquer dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ (na realidade, a função f é lipschitziana).

Dado $\varepsilon > 0$, escolha-se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Então

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

■

Exercício resolvido 6.2 Calcule a derivada da função $\operatorname{arcotg} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$.

Resolução: Comecemos por observar que

- $\operatorname{cotg} :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável;
- $\forall\, x \in]0, \pi[\qquad \operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x \neq 0$;
- a função arcotg é contínua, por ser a função inversa de uma função contínua definida num intervalo.

Pelo Teorema 6.30, a função arcotg é derivável em todos os pontos do seu domínio e

$$\begin{aligned} \forall\, y \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{arcotg}'(y) &= \frac{1}{\operatorname{cotg}'(\operatorname{arcotg} y)} \\ &= \frac{1}{-\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arcotg} y)} \\ &= \frac{-1}{1 + \operatorname{cotg}^2(\operatorname{arcotg} y)} = \frac{-1}{1 + y^2}. \end{aligned}$$

■

Exercício resolvido 6.3 Mostre que a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{ch} x+\frac{1}{x^2+1}\right)} \end{array}$ é derivável e calcule f'.

Resolução: As seguintes funções

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen}^2 x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \eta: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{ch} x + \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

são deriváveis: φ é a função exponencial de base e, ψ é o produto da função sen por si própria e a função η é a soma de uma função hiperbólica com uma função racional.

Como $f = \varphi \circ \psi \circ \eta$, sendo a composta de funções deriváveis, é derivável. Aplicando a regra de derivação da função composta num ponto $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{ch} x+\frac{1}{x^2+1}\right)}\right)' \\ &= e^{\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{ch} x+\frac{1}{x^2+1}\right)} \left(\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{ch} x + \frac{1}{x^2+1}\right)\right)' \\ &= e^{\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{ch} x+\frac{1}{x^2+1}\right)} 2 \operatorname{sen}\left(\operatorname{ch} x + \frac{1}{x^2+1}\right) \cos\left(\operatorname{ch} x + \frac{1}{x^2+1}\right) \left(\operatorname{ch} x + \frac{1}{x^2+1}\right)' \\ &= 2\, e^{\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{ch} x+\frac{1}{x^2+1}\right)} \operatorname{sen}\left(\operatorname{ch} x + \frac{1}{x^2+1}\right) \cos\left(\operatorname{ch} x + \frac{1}{x^2+1}\right) \left(\operatorname{sh} x - \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right). \end{aligned}$$

■

Exercício resolvido 6.4 Dados $A, B, C \in \mathbb{R}$, considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{argsh}(x+A) & \text{se } x > 0, \\ B & \text{se } x = 0, \\ \log(x^2+2x+e) + C & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determine para que valores de A, B e C a função f é derivável.

Resolução:

A função f é obviamente derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, para quaisquer valores de A, B e C. Queremos verificar quando é que ela é derivável em $x = 0$.

- Para que f seja derivável em $x = 0$, é necessário que f seja contínua em $x = 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{argsh}(x+A) = \operatorname{argsh} A = B = 1 + C = \lim_{x\to 0^-} \Big(\log(x^2+2x+e) + C \Big).$$

Tem-se assim $B = \operatorname{argsh} A = 1 + C$.

- É também necessário que existam e sejam iguais $f'(0^+)$ e $f'(0^-)$.

Mas

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{argsh}(h+A) - B}{h - 0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(h+A)^2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}},$$

por aplicação da Regra de l'Hôpital e

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\log(h^2+2h+e) + C - B}{h - 0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h+2}{h^2+2h+e} = \frac{2}{e},$$

aplicando também a Regra de l'Hôpital.

Temos de ter, então $\dfrac{1}{\sqrt{1+A^2}} = \dfrac{2}{e}$.

Assim, tem-se que $\begin{cases} A = \frac{\sqrt{e^2-4}}{2} \\ B = \operatorname{argsh} \frac{\sqrt{e^2-4}}{2} \\ C = \operatorname{argsh} \frac{\sqrt{e^2-4}}{2} - 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} A = -\frac{\sqrt{e^2-4}}{2} \\ B = -\operatorname{argsh} \frac{\sqrt{e^2-4}}{2} \\ C = -\operatorname{argsh} \frac{\sqrt{e^2-4}}{2} - 1 \end{cases}$ ■

Exercício resolvido 6.5 Determine os pontos do gráfico de $f(x) = 2x^3 - x - 1$ para os quais a recta normal a $\operatorname{Gr}(f)$ é paralela à recta de equação $y = 3x$.

Resolução: A recta normal a $\operatorname{Gr}(f)$ num ponto $(x, f(x))$ tem declive $\dfrac{-1}{f'(x)}$. Mas

$$\frac{-1}{f'(x)} = 3 \iff \frac{-1}{6\,x^2 - 1} = 3 \iff x = \frac{1}{3} \ \vee \ x = -\frac{1}{3}$$

e os pontos pretendidos são $(\frac{1}{3}, -\frac{34}{27})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{20}{27})$. ■

Exercício resolvido 6.6 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = a,$$

sendo $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$.

Resolução: Se a função f fosse uma função injectiva, como está definida num intervalo, pelo Teorema 5.15, seria estritamente monótona, o que contraria o facto de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = a$.

Como f não é injectiva, existem x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$. A função $f_{|_{[x_1, x_2]}}$ verifica as hipóteses do Teorema de Rolle. Então existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = 0$. ∎

Exercício resolvido 6.7 Mostre que

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}_0^+ \qquad \operatorname{sen} x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$.

Resolução:

a) Seja $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Observe que a função f é indefinidamente derivável em $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$, que $f'(x) = -\operatorname{sen} x + x$ e que $f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$. Como, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$, a função f' é crescente.

- Seja $x > 0$.
  Apliquemos o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[0,x]}}$. Então

  $$\exists\, c_x \in]0, x[\qquad f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0).$$

  Mas, como f' é crescente, $f'(c_x) = -\operatorname{sen} c_x + c_x \geq f'(0) = 0$, concluindo-se assim que

  $$\forall\, x > 0 \qquad f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0.$$

- Seja $x < 0$.
  Apliquemos o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[x,0]}}$. Então

$$\exists\, c_x \in\,]x,0[\qquad f(x) - f(0) = f'(c_x)(x-0).$$

  Mas $f'(c_x) \leq f'(0) = 0$ e então, como $x < 0$, $f'(c_x)\,x \geq 0$, concluindo-se que

$$\forall\, x < 0 \qquad f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0.$$

- Seja $x = 0$.
  Neste caso a desigualdade é imediatamente verificada.

b) Seja $g(x) = \operatorname{sen} x - x + \dfrac{x^3}{6}$, $x \in \mathbb{R}$. Como a função g é derivável, dado $x > 0$, podemos aplicar o Teorema de Lagrange a $g_{|_{[0,x]}}$. Então, como $g(0) = 0$, tem-se que

$$\exists\, d_x \in\,]0,x[\qquad g(x) = g'(d_x)\,x.$$

Mas $g'(d_x) = \cos d_x - 1 + \dfrac{d_x^2}{2} \geq 0$, pela alínea anterior, concluindo-se assim que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_0^+ \qquad \operatorname{sen} x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

■

Exercício resolvido 6.8 Determine os pontos da parábola de equação $y = 4 - x^2$ que estão à distância mínima do ponto $(0,-1)$.

Resolução: A distância de um ponto $(x, 4-x^2)$ da parábola ao ponto $(0,-1)$ é dada por $\sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2+1)^2}$. Minimizar a distância é equivalente a minimizar o quadrado da distância. Queremos minimizar então a função $f(x) = x^2 + (5-x^2)^2 = x^4 - 9x^2 + 25$, $x \in \mathbb{R}$.

Como

$$f'(x) = 0 \iff 4\,x^3 - 18\,x = 0 \iff 2\,x(2\,x^2 - 9) = 0 \iff x = 0 \vee x = \frac{3}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{3}{\sqrt{2}},$$

e, sendo $f''(x) = 12\,x^2 - 18$, tem-se que

$$f''(0) = -18 < 0, \quad f''\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = f''\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 36 > 0.$$

O ponto zero é ponto de máximo local e os pontos $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ e $\frac{3}{\sqrt{2}}$ são pontos de mínimo local. Observe-se que $f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{19}{4}$.

Considerando a função $f_{|_{[-3,3]}}$, uma vez que se trata de uma função contínua e $f(-3) = f(3) = 25 > \frac{19}{4}$, concluímos que $\frac{19}{4}$ é o mínimo absoluto de $f_{|_{[-3,3]}}$.

Observando agora que $|x| > 3 \Longrightarrow x^2 - 9 > 0$, tem-se que

$$|x| > 3 \Longrightarrow f(x) = x^2\left(x^2 - 9\right) + 25 > 25,$$

logo $\frac{19}{4}$ é o mínimo absoluto de f.

Tem-se assim que os pontos $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$, cuja distância a $(0, -1)$ é $\frac{\sqrt{19}}{2}$, são os pontos procurados. ■

6.7 Exercícios propostos

Exercício 6.1 Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{2 + \cos x}$;

b) $\operatorname{tg} x$;

c) $\operatorname{cotg} x$;

d) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 2}$;

e) $\sec x$;

f) $\operatorname{tg} x \sec x$;

g) $\dfrac{ax^2 + dx + c}{\operatorname{sen} x + \cos x}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$;

h) $\log(\operatorname{sen}^2 x + 1)$;

i) $\log_5(\operatorname{sen}^2 x + 1)$;

j) $2^{x \log^2(x-3) \operatorname{sen} x}$.

Exercício 6.2 Seja $f(x) = (ax + b)\operatorname{sen} x + (cx + d)\cos x$. Determine os valores de a, b, c e d para os quais $f'(x) = x \cos x$.

Exercício 6.3 Seja $f(x) = 3x^2 - x - \log x$, $x \geq 1$.

a) Mostre que f é injectiva.

b) Calcule $(f^{-1})'(2)$.

c) Determine o contradomínio de f.

d) Mostre que $\lim\limits_{n}\left[f\left(n+\frac{1}{n}\right)-f(n)\right]=6$.

e) Estude a continuidade uniforme de f em $[1,+\infty[$.

Sugestão: use o resultado da alínea anterior.

Exercício 6.4 Dada a fórmula $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad (x\neq 1)$, determine (por diferenciação) fórmulas para:

a) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

b) $1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$.

Exercício 6.5 Seja $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$. Use a fórmula do binómio de Newton para mostrar que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+nxh^{n-2}+h^{n-1}.$$

Faça $h\to 0$ e conclua que $f'(x)=nx^{n-1}$.

Exercício 6.6 Seja $f(x)=x+\operatorname{sen}x$. Calcule os pontos do gráfico de f em que a tangente ao gráfico nesses pontos tem inclinação:

a) 0; b) 2; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{1}{2}$.

Exercício 6.7 Determine a recta tangente ao gráfico de $f(x)=(x^5-3x^4+x^3-x^2+x)^{100}$ em $x=1$.

Exercício 6.8 Para cada uma das funções a seguir definidas, encontre os valores das constantes a e b, em função da constante c, de modo a que sejam deriváveis:

a) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x\leq c,\\ ax+b & \text{se} \quad x>c;\end{cases}$

b) $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que $g(x)=\begin{cases} 1/|x| & \text{se} \quad x>|c|,\\ a+bx^2 & \text{se} \quad x\leq|c|.\end{cases}$

Exercício 6.9 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que f é uniformemente contínua.

b) Mostre que f é derivável e que f' é a função nula.

Exercício 6.10 Seja $f :]-2, 5[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que, para todo o $x \in]-2, 5[$, $-2 \leq f'(x) \leq 1$. Mostre que f é uniformemente contínua.

Exercício 6.11 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e suponha que existe $f'(a)$. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

a) $\displaystyle\lim_{h \to a} \frac{f(h) - f(a)}{h} = f'(a)$;

b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = f'(a)$;

c) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(a+2t) - f(a+t)}{t} = f'(a)$;

d) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(a+2t) - f(a-t)}{t} = f'(a)$;

e) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(a+2t) - f(a-2t)}{4t} = f'(a)$.

Exercício 6.12 Para cada uma das funções seguintes:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$;
2. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$;
3. $f(x) = 17x^2$;
4. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$;
5. $f(x) = x + \cos x$;
6. $f(x) = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{12}\cos x$.

a) Calcule os zeros de f.

b) Estude o sinal de f' e os intervalos onde f é monótona.

Exercício 6.13 Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log(\operatorname{tg} x)}$;

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4}\right)$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\log x}$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\log(1+x)}-\sqrt{1-\log(1+x)}}{x}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{2x-\operatorname{sen} 2x}$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\big[\log(1+x)-\log x\big]x$.

Exercício 6.14 Aplicando convenientemente o Teorema de Lagrange mostre que

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^+ \qquad \log(x+1)<x.$$

Exercício 6.15 Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que entre dois zeros consecutivos de f' existe no máximo um zero de f. Utilize este facto para mostrar que $p(x)=x^3-6x^2+9x-1$ possui exactamente um zero no intervalo $]1,3[$.

Exercício 6.16

a) Aplicando eventualmente o Teorema de Rolle mostre que, se $b\in\mathbb{R}$, a equação $x^3-3x+b=0$ tem no máximo uma solução no intervalo $]-1,1[$.

b) Encontre a solução de $x^3-3x+1=0$ no intervalo $[-1,1]$ com um erro inferior a $0,1$.

Exercício 6.17 Mostre que $\forall\, x\in\mathbb{R}^+ \qquad \dfrac{e^x-1}{x}\geq 1.$

Exercício 6.18 Sejam $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a,b[$, tal que $f(a)=f(b)=0$. Mostre que dado $k\in\mathbb{R}$, existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=kf(c)$.

Sugestão: Considere $g(x)=f(x)e^{-kx}$ e aplique o Teorema de Rolle.

Exercício 6.19 Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $f : [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen}(x+2)+1 & \text{se } x \leq -2, \\ ax^2 + bx + c & \text{se } -2 < x \leq 0, \\ e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Para que valores de a, b, c a função f é contínua?

b) Mostre que, se $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ e $c = 1$, f é derivável.

c) Para $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ e $c = 1$, calcule o mínimo de f.

Exercício 6.20 Sejam a e $b \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} x^a |\log x|^b = 0$.

Exercício 6.21 Calcule $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)} \right)^{n+1}$.

Exercício 6.22 Sejam f e g duas funções duas vezes deriváveis em zero e satisfazendo as relações $f(0) = \dfrac{2}{g(0)}$, $f'(0) = 2g'(0) = 4g(0)$.

a) Seja $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Calcule $h'(0)$.

b) Seja $k(x) = f(x)\, g(x) \operatorname{sen} x$. Calcule $k'(0)$.

c) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)}$.

Exercício 6.23

a) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função par. Mostre que se f é derivável em $\mathbb{R}^+$ então f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar. Mostre que se f é derivável em $\mathbb{R}^+$ então f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Dê exemplo de uma função par e de uma função ímpar, contínuas em $\mathbb{R}$ e deriváveis apenas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício 6.24 Dê exemplo de, ou mostre por que não existe:

a) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável apenas no ponto 1;

b) duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não deriváveis em 0 e tais que fg e $f+g$ são deriváveis em 0;

c) uma função $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, tal que $f(2) = f(3)$ e $f'(x) \geq x$, para todo o $x \in [2,3]$;

d) uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, não decrescente, tal que $f'(x) < 0$ para todo o $x \in X$;

e) uma $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, com pelo menos dois zeros, mas cuja derivada nunca se anula.

Exercício 6.25 Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deriváveis, tais que $f(0) = 2$ e $f'(x) = 3, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 6.26 Seja $f :]0,5[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável e seja $(x_n)_n$ uma sucessão convergente para 2, tal que $x_n \in]0,2[\cup]2,5[$ e $f(x_n) = f(2)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $f'(2) = f''(2) = 0$.

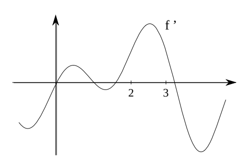
Exercício 6.27 Seja $f(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ para $x \geq 0$. Calcule $f'(x)$, $f''(x)$ e $f'''(x)$.

Exercício 6.28 Seja P um polinómio de grau 3 verificando $P(0) = P(1) = -2$, $P'(0) = -1$ e $P''(0) = 10$. Explicite P.

Exercício 6.29 Seja $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, com $L \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) = 0$. Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Exercício 6.30 Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando:

a) se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável, então f é uniformemente contínua;



b) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que a representação gráfica de f' é a apresentada na figura abaixo, então f possui, quando muito, um zero em $[2,3]$;

c) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f'(1) = f'(2)$, então $\exists\, c \in]1,2[$, tal que $f(c) = 0$;

d) se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável e $f'(x) > 0, \forall x \in [0,1]$, então $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$;

e) sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = f(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Se g é derivável, então f também é derivável;

f) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função pelo menos 3 vezes derivável, tal que $f''' > 0$, então f tem, no máximo, dois extremos locais.

Exercício 6.31 Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Seja $a \in I$ e suponha que f é de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ em $]a-\delta, a+\delta[\cap I$, para algum $\delta \in \mathbb{R}^+$. Suponha ainda que $f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ e que $f^{(k)}(a) \neq 0$. Mostre que:

a) se $f^{(k)}(a) > 0$ e k é par, então a é um ponto de mínimo local de f;

b) se $f^{(k)}(a) < 0$ e k é par, então a é um ponto de máximo local de f;

c) se $f^{(k)}(a) \neq 0$ e k é ímpar, então a não é um ponto de máximo nem de mínimo local de f.

Exercício 6.32 Mostre que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^{2k} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é derivável até à ordem k mas $f^{(k)}$ é descontínua em $x = 0$.

Exercício 6.33 Mostre que a função $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|x^n \end{array}$ é de classe $\mathscr{C}^n$ mas não admite derivada de ordem $n+1$.

Exercício 6.34 Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável verificando $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Mostre que existe $c \in]a, +\infty[$ tal que $f''(c) = 0$.

Exercício 6.35 Sejam I um intervalo aberto, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $a \in I$. Mostre que, se existe $f''(a)$, então

a) $f''(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

b) $f''(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}$.

Anexo

Apresenta-se uma tabela relativa ao cálculo de limites.

Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sucessões e suponhamos que existem $\lim\limits_n a_n = d_1$ e $\lim\limits_n b_n = d_2$. No texto que se segue será colocado o resultado das diferentes operações entre d_1 e d_2, quando um deles, ambos ou o resultado for infinito, supondo-se que d_2 é um número real quando aparece assim designado na operação.

$(+\infty) + d_2 = +\infty$	$(-\infty) + d_2 = -\infty$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
$(+\infty) + (-\infty)$ indeterminação	$(-\infty) + (+\infty)$ indeterminação

$(+\infty).d_2 =$ (sinal de d_2)$.(+\infty)$ se $d_2 \neq 0$	$(-\infty).d_2 =$ (sinal de d_2)$.(-\infty)$ se $d_2 \neq 0$
$(+\infty).0$ indeterminação	$(-\infty).0$ indeterminação
$(+\infty).(+\infty) = +\infty$	$(-\infty).(+\infty) = -\infty$
$(+\infty).(-\infty) = -\infty$	$(-\infty).(-\infty) = +\infty$

$(+\infty)/0^+ = +\infty$	$(-\infty)/0^+ = -\infty$
$(+\infty)/d_2 =$ (sinal de d_2)$.(+\infty)$ se $d_2 \neq 0$	$(-\infty)/d_2 =$ (sinal de d_2)$.(-\infty)$ se $d_2 \neq 0$
$(+\infty)/0^- = -\infty$	$(-\infty)/0^- = +\infty$
$(+\infty)/(+\infty)$ indeterminação	$(-\infty)/(+\infty)$ indeterminação
$(+\infty)/(-\infty)$ indeterminação	$(-\infty)/(-\infty)$ indeterminação
$d_2/0^+ =$ (sinal de d_2)$.(+\infty)$	$d_2/0^- =$ (sinal de d_2)$.(-\infty)$

$(+\infty)^0$ indeterminação	$(-\infty)^0$ indeterminação
$1^{+\infty}$ indeterminação	$1^{-\infty}$ indeterminação
0^0 indeterminação	

A tabela acima pode aplicar-se a limites de funções.

Bibliografia

[1] Agudo, F. Dias, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Escolar Editora, 1989.

[2] Apostol, T., *Cálculo, Vol. 1*, Editora Reverté.

[3] Guerreiro, J. Santos, *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora, Lisboa, 1989.

[4] Lima, E. Lages, *Curso de Análise, Vol. 1*, Projecto Euclides, IMPA, 1987.

[5] Matos, A. Coimbra, *Funções Reais duma Variável Real*, Publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto, nº 71, Instituto de Alta Cultura, Porto, 1969.

[6] Protter, M. H. e Morrey, C. B., *A First Course in Real Analysis, Second Edition*, Springer-Verlag, 1991.

[7] Real, L. Neves, *Apontamentos de Cálculo*, Departamento de Matemática Pura, Universidade do Porto, Porto, 1978.

[8] Spivak, M., *Cálculo Infinitesimal*, Editora Reverté, 1991.

Índice