Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Funções hiperbólicas

As funções ditas *hiperbólicas* são definidas a partir de certas combinações de exponenciais. Tais funções possuem propriedades muito boas, muitas delas semelhantes a algumas das funções trigonométricas.

Seno hiperbólico

O *seno hiperbólico* é a função

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

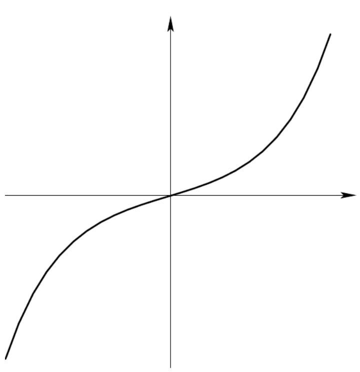
Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injetiva. Possui um único zero, a origem. Além disso, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\, x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}\, x = -\infty$.

Cosseno hiperbólico

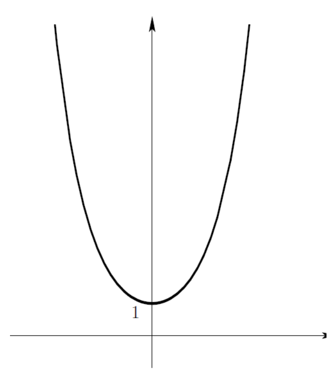
O *cosseno hiperbólico* é a função

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Trata-se de uma função contínua e par. Logo, não é injetiva. Não possui zeros e atinge um mínimo na origem, com valor $\mathrm{ch}\, 0 = 1$. Além disso, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\, x = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty$.



$y = \mathrm{sh}\, x, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}$



$y = \mathrm{ch}\, x, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{ch}} = [1, +\infty[$

Tangente hiperbólica

A *tangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \end{array}$$

ou seja, por

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injetiva. Possui um único zero, em 0. Além disso,

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1$$

pelo que o gráfico da th possui uma assímptota horizontal de equação $y = 1$, para $x \to +\infty$. Da imparidade da th, existe outra assímptota horizontal de equação $y = -1$, para $x \to -\infty$. Tem-se ainda $\mathrm{CD}_{\mathrm{th}} =]-1, 1[$.

Cotangente hiperbólica

A *cotangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} \coth: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \end{array}$$

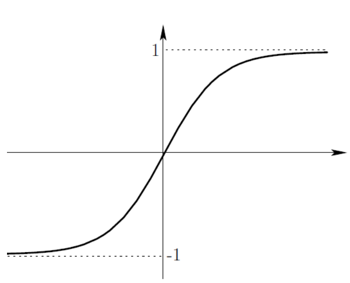
ou seja, por

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1}$$

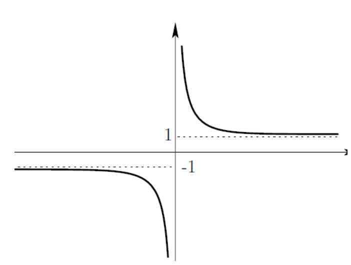
Trata-se de uma função contínua, ímpar e sem zeros. Apesar de não ser monótona, é estritamente decrescente para $x > 0$, onde toma valores positivos, e para $x < 0$, onde toma valores negativos. Logo é injetiva. Da definição (1) sai que

$$\lim_{x\to0^+} \coth x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \coth x = 1$$

pelo que o gráfico da coth possui uma assímptota horizontal de equação $y = 1$, para $x \to +\infty$, e uma assímptota vertical de equação $x = 0$. Da imparidade da coth, existe outra assímptota horizontal de equação $y = -1$, para $x \to -\infty$. Tem-se ainda que $\mathrm{CD}_{\coth} = \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$.



$y = \operatorname{th} x, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{CD}_{\mathrm{th}} =]-1, 1[$



$y = \coth x, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathrm{CD}_{\coth} = \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$

Secante hiperbólica

A *secante hiperbólica* é a função definida por

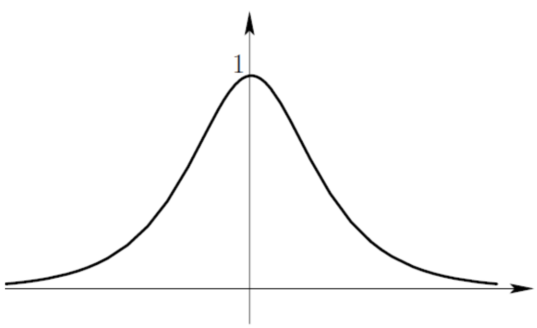
$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sech}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \end{array}$$

Cossecante hiperbólica

A *cossecante hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{cosech}: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\operatorname{sh} x} \end{array}$$

Secante hiperbólica



Cossecante hiperbólica