Funções

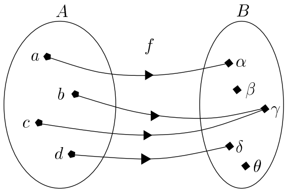
Maria Joana Torres

2021/22

Definição:

Chamamos **função** a dois conjuntos não vazios, X e Y, munidos de uma lei de formação ou regra de correspondência, f, que a cada elemento x de X associa um único elemento $f(x)$ de Y. Em geral denotamos a função por $f : X \longrightarrow Y$.

Usa-se a notação $x \longmapsto f(x)$ para indicar que o elemento x é enviado por f em $f(x)$ ou que f faz corresponder a x o elemento $f(x)$.



Definição:

Dados os conjuntos X e Y e a função $f : X \longrightarrow Y$, designa-se:

- o conjunto X por **domínio** da função e denota-se por $\mathrm{Dom}(f)$;
- o conjunto Y por **conjunto de chegada** da função;
- o conjunto

$$f(X) = \mathrm{Im}\,(f) = CD(f) = \{f(x) : x \in X\}$$

  por **contradomínio** ou **imagem** da função;
- os elementos x de X por **objetos**;
- os elementos $f(x)$ tais que $x \in X$ por **imagens**;
- o conjunto $\mathrm{Gr}\,(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \; y = f(x)\}$ por **gráfico de** f.

Definição:

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, denomina-se por:

- **imagem de A por f** o conjunto

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\};$$

- **imagem recíproca de B por f** o conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Definição:

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ diz-se:

- **injetiva** quando a objetos distintos em X correspondem imagens distintas em Y, ou seja, quando

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y),$$

ou ainda, quando

$$\forall x, y \in X, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y;$$

- **sobrejetiva** quando o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, isto é, quando $f(X) = Y$, ou seja, quando

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : \quad f(x) = y;$$

- **bijetiva** quando é, simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Definição:

Dado um conjunto X não vazio, define-se $id_X : X \longrightarrow X$ e designa-se **função identidade (em X)**, a função tal que

$$id_X(x) = x, \quad \forall\, x \in X.$$

Definição:

Chamamos **função real de variável real** a uma função $f : X \longrightarrow Y$, em que X e Y são subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.

Definição:

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **majorada** quando

$$\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \leq M;$$

- **minorada** quando

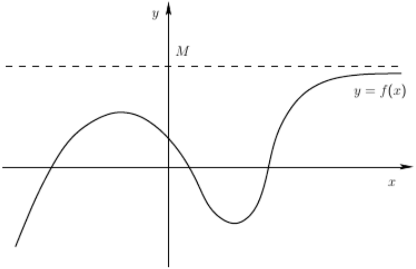
$$\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \geq m;$$

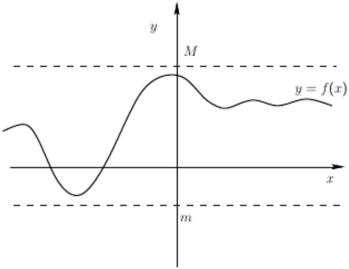
- **limitada** quando

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ m \leq f(x) \leq M,$$

ou equivalentemente, quando

$$\exists L \in \mathbb{R}^{+} : \ \forall x \in X, \ |f(x)| \leq L.$$


y
M
$y = f(x)$
x


y
M
$y = f(x)$
x
m

Definição:

Uma função $f : X\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **crescente** quando

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

em particular **estritamente crescente** quando

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

- **decrescente** quando

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

em particular **estritamente decrescente** quando

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

- **monótona** se é crescente ou decrescente; em particular, **estritamente monótona** quando é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

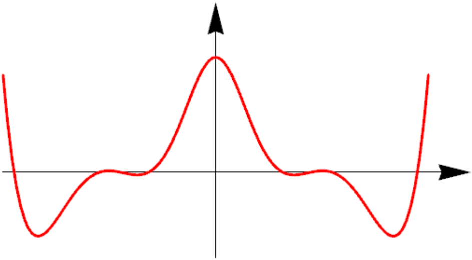
Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **simétrico em relação à origem** quando

$$\forall x \in X,\ x \in X \ \Leftrightarrow\ -x \in X.$$

Definição:

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

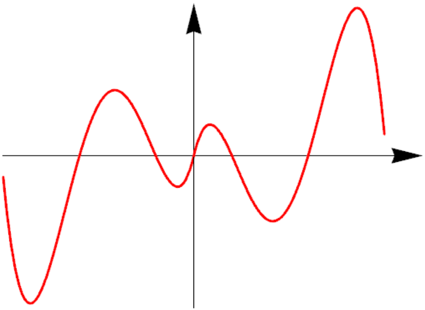
- **par** quando X é simétrico em relação à origem e $\forall x \in X,\ f(-x) = f(x)$. O gráfico de f é invariante por reflexão em torno do eixo vertical.



Definição:

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- **ímpar** quando X é simétrico em relação à origem e $\forall x \in X$, $f(-x) = -f(x)$. O gráfico de f é invariante por uma rotação de $180°$.



<u>Definição</u>:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e A, B dois conjuntos tais que $A \subseteq X \subseteq B$.

Chama-se **restrição** de f ao conjunto A à função (única)

$$f_{|A} : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad (f_{|A})(x) = f(x), \quad \forall x \in A,$$

e **prolongamento** de f a B a qualquer função de domínio B que coincida com f em X, ou seja, a qualquer função

$$f^* : B \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f^*(x) = f(x), \; \forall x \in X.$$

Definição:

Dadas duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$, define-se

- **soma de f e g:**

$$\begin{array}{rccc} f+g: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

- **produto de f e g:**

$$\begin{array}{rccc} fg: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

- **quociente de f e g (**supondo que $g(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in X$**):**

$$\begin{array}{rccc} \frac{f}{g}: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Composição de funções

Definição:

Dadas duas funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow W$, define-se a **função g composta com f** (escreve-se $g \circ f$) do seguinte modo:

$$
\begin{array}{rccc}
g \circ f : & X & \longrightarrow & W \\
 & x & \longmapsto & g(f(x))
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & W
\end{tikzcd}
$$

Definição:

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, uma função $g : Y \longrightarrow X$ diz-se **inversa de** f se $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$. Uma função que admite inversa diz-se **invertível**.

Nota:

Facilmente se verifica que se $f : X \longrightarrow Y$ é invertível, a sua inversa é única.

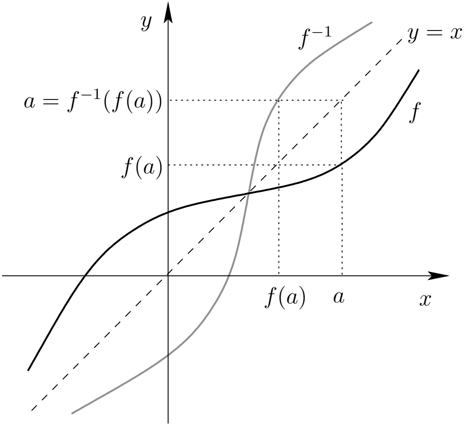
Podemos então denotar a função inversa de f por $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

Observe-se que f^{-1} é invertível e que $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Proposição:

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é invertível se e só se é bijetiva.

A partir de uma representação gráfica da função f podemos obter uma representação gráfica de f^{-1}, procedendo como se indica na figura seguinte:

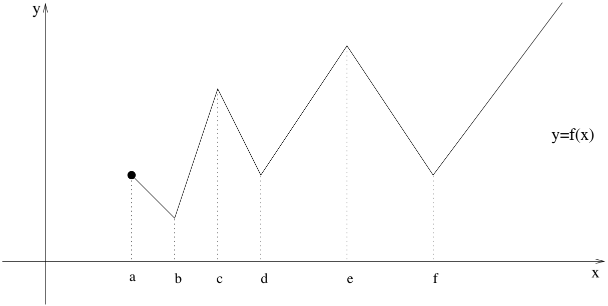


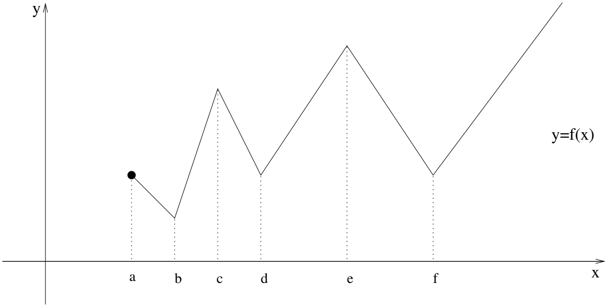
Definição:

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ possui um:

- **máximo local** em $a \in X$ se
$$\exists \epsilon > 0 : \ \forall x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap X, \ f(x) \leq f(a);$$
- **máximo absoluto** em $a \in X$ se
$$\forall x \in X, \ f(x) \leq f(a);$$
- **mínimo local** em $a \in X$ se
$$\exists \epsilon > 0 : \ \forall x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap X, \ f(x) \geq f(a);$$
- **mínimo absoluto** em $a \in X$ se
$$\forall x \in X, \ f(x) \geq f(a).$$

De um modo geral, os máximos e os mínimos são chamados de **extremos**. Um ponto onde a função f atinge um extremo diz-se um **ponto extremante** de f, podendo tratar-se de um **maximizante** ou de um **minimizante**.


y
x
a
b
c
d
e
f
y=f(x)



A função f possui máximos locais em a, c e e, que são $f(a)$, $f(c)$ e $f(e)$, respetivamente. Não possui máximo absoluto. Possui mínimos locais em b, d e f, que são $f(b)$, $f(d)$ e $f(f)$, respetivamente, e um mínimo absoluto em b.