Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMat

Cálculo
LCC
2019/2020

Formulário 1 - Séries de números reais

Série geométrica

Seja $r \in \mathbb{R}$. À série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ chama-se série geométrica de razão r.

- A sua sucessão das somas parciais é definida por

$$s_n = \begin{cases} n & \text{se } r = 1, \\ \dfrac{1-r^n}{1-r} & \text{se } r \neq 1. \end{cases}$$

- Esta série diverge se $|r| \geq 1$ e converge se $|r| < 1$, caso em que a sua soma é $s = \dfrac{1}{1-r}$.

Série de Riemann

Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$. À série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ chama-se série de Riemann de expoente α.

- Esta série diverge se $\alpha \leq 1$ e converge se $\alpha > 1$.
- No caso particular em que $\alpha = 1$, a série de Riemann recebe a designação de série harmónica (divergente, portanto).

Série de Mengoli (ou telescópica)

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e $p \in \mathbb{N}$. À série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p})$ chama-se série de Mengoli ou telescópica.

- A sua sucessão das somas parciais é definida por

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Esta série converge se e só se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente. Em caso de convergência, a sua soma é $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \lim\limits_n a_n$.

Primeiro Critério de Comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ séries de termos não negativos tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.

a) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

b) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge.

Segundo Critério de Comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ séries de termos posistivos tais que $\ell = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$, sendo $\ell \in [0, +\infty]$.

a) Se $\ell \in \mathbb{R}^+$ então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ têm a mesma natureza.

b) Se $\ell = 0$

i) se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

ii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge.

c) Se $\ell = +\infty$

i) se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

ii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge.

Critério da razão (de D'Alembert)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos positivos e $\ell = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Se $\ell < 1$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

b) Se $\ell > 1$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

c) Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Critério da raíz (de Cauchy)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos não negativos e $\ell = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$.

a) Se $\ell < 1$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

b) Se $\ell > 1$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

c) Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Critério de Leibnitz

Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente tal que $\lim_n a_n = 0$. Então $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ é convergente.