Capítulo II

Sucessões e Séries de Números Reais

Este capítulo está organizado em duas partes. Na primeira parte, trataremos de sucessões e, por se tratar de um conceito já abordado em anos precedentes, faremos uma abordagem breve com o objectivo de fixar noções e apresentar os resultados principais. Na segunda e última parte, estudaremos séries de números reais. Tratando-se de um tópico novo, faremos uma abordagem mais detalhada.

1 Sucessões

Chamamos *sucessão* de números reais a toda a aplicação u definida em $\mathbb{N}$ com valores em $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) \end{array} \tag{1}$$

onde $u(n)$ é habitualmente representado por u_n. A imagem por u do genérico $n \in \mathbb{N}$, u_n, designa-se por *termo de ordem* n ou *termo geral* da sucessão. Para indicar a sucessão u, usaremos a notação $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, mais simplesmente, $(u_n)_n$. Por vezes, escreveremos ainda u_1, u_2, u_3, …, u_n, …

Exemplo 1
Consideremos a sucessão $(u_n)_n$ definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

O primeiro termo é $u_1 = 1$, o segundo é $u_2 = \dfrac{1}{2}$, o terceiro é $u_3 = \dfrac{1}{3}$, e assim por diante.

O termo geral é precisamente $u_n = \dfrac{1}{n}$. ■

1.1 Primeiras definições

Nesta subsecção vamos fixar alguns conceitos básicos sobre sucessões. Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de números reais. Dizemos que $(u_n)_n$ é uma sucessão:

(a) *constante* se $u_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para algum $a \in \mathbb{R}$;

(b) de termos *distintos dois a dois* se $u_n \neq u_m$, sempre que $n \neq m$;

(c) *alternada* se os seus termos são alternadamente positivos e negativos, isto é, se

$$u_n = (-1)^n \, a_n \,, \quad \text{com } \; a_n > 0, \; \forall n \in \mathbb{N} \,, \quad \text{ou com } \; a_n < 0, \; \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (2)$$

(d) *limitada inferiormente* ou *minorada* se

$$\exists a \in \mathbb{R} : \; u_n \in [a, +\infty[\,, \; \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (3a)$$

(e) *limitada superiormente* ou *majorada* se

$$\exists b \in \mathbb{R} : \; u_n \in]-\infty, b] \,, \; \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (3b)$$

(f) *limitada* se

$$\exists \, a, b \in \mathbb{R} : \; u_n \in [a, b] \,, \; \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (3c)$$

ou, equivalentemente, se

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \; u_n \in [-M, M\,] \,, \; \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (3c)_1$$

ou ainda se

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \;\; |u_n| \leq M, \; \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (3c)_2$$

(g) *crescente* se

$$u_n \leq u_{n+1} \,, \;\; \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (4a)$$

em particular, *estritamente crescente* se

$$u_n < u_{n+1} \,, \;\; \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (4b)$$

(h) *decrescente* se

$$u_n \geq u_{n+1} \,, \;\; \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (4c)$$

em particular, *estritamente decrescente* se

$$u_n > u_{n+1} \,, \;\; \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (4d)$$

(i) *monótona* se é crescente ou decrescente.

Exemplo 2

Consideremos as sucessões definidas por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \,, \quad b_n = n^2 \,, \quad c_n = \operatorname{sen} n \,, \quad d_n = (-1)^n \cos \, (n\pi) \;, \quad e_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad (5)$$

Temos que:

$(a_n)_n$ é alternada e limitada porque $|a_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

$(b_n)_n$ é estritamente crescente, logo minorada, já que $b_n \geq b_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e não é limitada;

$(c_n)_n$ é limitada, pois $c_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, mas não é monótona nem alternada;

$(d_n)_n$ é constante porque $d_n = (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

$(e_n)_n$ é estritamente decrescente porque

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!^{\,2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{n!^{\,2}}{(2n)!}} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{2n+1} < \frac{1}{2} < 1\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies e_{n+1} < e_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $e_n < e_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como se trata de uma sucessão de termos positivos, conclui-se que $0 < e_n < e_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e, portanto, $e_n \in]0, e_1]$, significando que $(e_n)_n$ é limitada. ■

Exercício

Diga quais das seguintes sucessões são constantes, alternadas, minoradas, majoradas, limitadas ou monótonas:

(a) $u_n = 1$; $\quad (b)$ $v_n = (-1)^n$; $\quad (c)$ $w_n = (-1)^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

(d) $x_n = \dfrac{n}{n+2}$; $\quad (e)$ $y_n = \dfrac{7-6n}{2n+1}$; $\quad (f)$ $z_n = \begin{cases} n^3 & \text{se } n \leq 100, \\ 1 & \text{se } n \geq 101. \end{cases}$

Nota: É erro frequente dizer que $(z_n)_n$ não é limitada. Repare-se que $1 \leq z_n \leq 100^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

■

1.2 Subsucessão

Dada uma sucessão $(u_n)_n$ de números reais, uma sua *subsucessão* é uma restrição da correspondente aplicação $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito (ou seja, não limitado) de $\mathbb{N}$, digamos a

$$\mathbb{N}^* = \{n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots\}\,, \qquad \text{com} \qquad n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \ldots$$

Tal subsucessão representa-se por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou por $\left(u_{n_p}\right)_{p \in \mathbb{N}}$.

Exemplo 3

Consideremos a sucessão real $(u_n)_n$ definida no Exemplo 1. Uma subsucessão de $(u_n)_n$ é, por exemplo, a sucessão constituída pelos termos de ordem par, *i.e.* por

$$u_{n_1} = u_2 = \frac{1}{2}\,, \quad u_{n_2} = u_4 = \frac{1}{4}\,, \quad u_{n_3} = u_6 = \frac{1}{6}\,, \quad \ldots$$

Outro exemplo é a sucessão constituída pelos termos cuja ordem é múltiplo de 10,

$$u_{n_1} = u_{10} = \frac{1}{10}\,, \quad u_{n_2} = u_{20} = \frac{1}{20}\,, \quad u_{n_3} = u_{30} = \frac{1}{30}\,, \quad \ldots$$

Algumas sucessões que não são subsucessões de $(u_n)_n$ são as seguintes

$$\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{6}\,,\ \frac{1}{6}\,,\ \ldots$$

$$\frac{1}{2}\,,\ 1\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{6}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \ldots$$

$$1\,,\ 0\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 0\,,\ \frac{1}{3}\,,\ 0\,,\ \frac{1}{4}\,,\ 0\,,\ \frac{1}{5}\,,\ 0\,,\ \ldots$$

■

Exercício

Diga quais das seguintes sucessões são subsucessões de $(u_n)_n$, com $u_n = \dfrac{1}{n}$.

(a) $1\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \frac{1}{7}\,,\ \frac{1}{9}\,,\ \ldots$

(b) $1\,,\ \frac{1}{10}\,,\ \frac{1}{100}\,,\ \frac{1}{1000}\,,\ \frac{1}{1000}\,,\ \frac{1}{1000}\,,\ \frac{1}{1000}\,,\ \ldots$

(c) $\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{6}\,,\ \frac{1}{10}\,,\ \frac{1}{8}\,,\ \ldots$

(d) $\frac{1}{10}\,,\ \frac{1}{11}\,,\ \frac{1}{20}\,,\ \frac{1}{21}\,,\ \frac{1}{30}\,,\ \frac{1}{31}\,,\ \ldots$

(e) $1\,,\ 1\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \ldots$

(f) $-1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ -\frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ -\frac{1}{5}\,,\ \frac{1}{6}\,,\ \ldots$

■

Dada uma sucessão possuindo certas "propriedades boas", qualquer sua subsucessão possui as mesma propriedades. Em particular, vale o seguinte resultado, cuja demonstração se deixa como exercício.

Propriedade 1

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão e $(w_n)_n$ uma sua subsucessão.

(a) Se $(u_n)_n$ é limitada então $(w_n)_n$ também é limitada.

(b) se $(u_n)_n$ é monótona então $(w_n)_n$ também é monótona, apresentando o mesmo tipo de monotonia. ■

Observação 1

(a) Da Propriedade 1 extraem-se duas consequências muito úteis. Uma delas serve para concluir que uma sucessão não é limitada, bastando encontrar uma sua subsucessão que não seja limitada. A outra consequência serve para mostrar que uma sucessão não é monótona, bastando encontrar uma sua subsucessão que não seja monótona, ou então duas subsucessões com monotonias diferentes.

(b) Uma dada sucessão pode não ser limitada ou não ser monótona e possuir subsucessões limitadas e subsucessões monótonas. É o caso, por exemplo, da sucessão

$$u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ par} \\ 1 - 1/n & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

que não é monótona nem limitada. No entanto, a subsucessão $(u_{2n-1})_n$ dos termos de ordem ímpar é estritamente cresecente e limitada. Já a subsucessão $(u_{2n})_n$ dos termos de ordem par é estritamente cresecente e não limitada.

(c) Porém, nem sempre é possível extrair uma subsucessão limitada de uma dada sucessão não limitada. Pensar no que acontece com a sucessão $(u_n)_n$ com $u_n = n$ e com uma qualquer sua subsucessão.

(d) Quanto à possibilidade de extrair uma subsucessão monótona de uma dada sucessão, vale o resultado que se enuncia mais adiante no Teorema 1. ■

Antes de passarmos ao resultado do primeiro teorema, comecemos por introduzir uma noção muito simples que nos será útil. Dada uma sucessão $(u_n)_n$, dizemos que o termo u_p constitui um *pico* da sucessão quando u_p é maior do que todos os termos seguintes, i.e.

$$u_p \quad \text{é um pico da sucessão } (u_n)_n \quad \text{quando} \quad u_p > u_n\,,\ \forall n > p \tag{6}$$

Exemplo 4

1. Se $(u_n)_n$ é crescente então $(u_n)_n$ não tem picos.
2. Se $(u_n)_n$ é estritamente decrescente então todos os termos são picos de $(u_n)_n$. ■

Exercício

Diga quais os termos da sucessão $(u_n)_n$ que são picos, onde:

(a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; (b) $u_n = (-1)^n n$. ■

Teorema 1

Qualquer sucessão de números reais possui uma subsucessão monótona.

Demonstração

Seja P o conjunto dos termos de $(u_n)_n$ que constituem picos.

- Se P é infinito, digamos $P = \{u_{p_1}, u_{p_2}, u_{p_3}, \ldots\}$, então a subsucessão de $(u_n)_n$ constituída pelos picos,
$$u_{p_1} > u_{p_2} > u_{p_3} > \cdots$$
é estritamente decrescente.
- Suponhamos que P é finito, $P = \{u_{p_1}, u_{p_2}, \ldots, u_{p_k}\}$.
Concentremo-nos nos termos da sucessão de ordem superior a p_k, em que nenhum deles é pico da sucessão. Seja u_{m_1} um desses termos. Como u_{m_1} não é pico,
$$\exists u_{m_2}:\ m_2 > m_1 \ \wedge\ u_{m_1} \leq u_{m_2}$$
Como u_{m_2} também não é pico,
$$\exists u_{m_3}:\ m_3 > m_2 \ \wedge\ u_{m_2} \leq u_{m_3}$$
E assim sucessivamente, encontrando-se a subsucessão crescente
$$u_{m_1} \leq u_{m_2} \leq u_{m_3} \leq \cdots$$

- Finalmente, se $P = \emptyset$, proceda-se como no último caso, começando por um termo u_{m_1} qualquer, obtendo-se igualmente, uma sucessão crescente. ■

É óbvio que nem toda a sucessão monótona é limitada. É ainda óbvio que nem toda a sucessão possuindo uma subsucessão limitada é também limitada. No entanto vale o seguinte resultado.

Teorema 2
Uma sucessão monótona é limitada se e só se possui uma subsucessão limitada.

Demonstração:

(i) A implicação directa é evidente, como se viu na Propriedade 1(a).

(ii) Quanto à implicação recíproca, consideremos uma sucessão monótona $(u_n)_n$ possuindo uma subsucessão limitada, $(u_{n_p})_p$, e mostremos que $(u_n)_n$ também é limitada.
Suponhamos que $(u_n)_n$ é crescente. Então

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \tag{7}$$

Da Propriedade 1(b), sai que $(u_{n_p})_p$ é também crescente, pelo que

$$u_1 \leq u_{n_1} \leq u_{n_2} \leq \cdots \leq u_{n_p} \leq \cdots$$

Como $(u_{n_p})_p$ é limitada, sabemos que $\exists M \in \mathbb{R}^+ : \ |u_{n_p}| \leq M, \ \forall p \in \mathbb{N}$.
Para a subsucessão, tem-se então que

$$u_1 \leq u_{n_1} \leq u_{n_2} \leq \cdots \leq u_{n_p} \leq \cdots \leq M \tag{8}$$

Como a subsucessão possui uma infinidade de termos, será simples concluir que a sucessão é limitada. De facto, seja $n \in \mathbb{N}$ uma ordem arbitrária na sucessão. É possível arranjar uma ordem $n_p \in \mathbb{N}$ na subsucessão tal que $n_p > n$. Como n_p é também uma ordem na sucessão, tem-se $u_n \leq u_{n_p}$, e das condições (7) e (8) sai que $u_1 \leq u_n \leq u_{n_p} \leq M$. Da arbitrariedade de $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $u_n \in [u_1, M]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, que garante que $(u_n)_n$ é limitada.
No caso em que $(u_n)_n$ é decrescente, a demonstração é análoga. ■

1.3 Limite de uma sucessão

Dada uma sucessão real $(u_n)_n$ e um elemento $a \in \mathbb{R}$, dizemos que a sucessão $(u_n)_n$ *converge* para a, ou que a é o *limite* da sucessão $(u_n)_n$, quando existe uma ordem a partir da qual, todos os termos da sucessão estão tão próximos de a quanto se queira. Ou seja, a partir de uma certa ordem suficientemente grande, todos os termos da sucessão estão arbitrariamente próximos de a. Simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \text{sse} \quad \forall \delta > 0\,, \ \exists p \in \mathbb{N} : \ n > p \implies |\, u_n - a \,| < \delta \tag{9a}$$

$$\text{sse} \quad \forall \delta > 0\,, \ \exists p \in \mathbb{N} : \ n > p \implies u_n \in \,]a - \delta, a + \delta[\,. \tag{9b}$$

Abreviadamente, escrevemos

$$\lim_n u_n = a \qquad \text{ou} \qquad u_n \longrightarrow a\,.$$

Da definição ($9b$) sai que, quando $\lim\limits_n u_n = a$, é possível "colocar" todos os termos da sucessão num intervalo aberto centrado em a com amplitude arbitrariamente pequena, à excepção, possivelmente, de um número finito de termos (aqueles até à ordem p, *inclusive*).

Se uma sucessão $(u_n)_n$ converge para algum $a \in \mathbb{R}$, diz-se que $(u_n)_n$ é *convergente*. Caso contrário, diz-se que $(u_n)_n$ é *divergente*.

Teorema 3 [Unicidade do limite]
O limite de uma sucessão convergente é único.

Demonstração:
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão convergente. Suponhamos $\lim\limits_n u_n = a$ e que $\lim\limits_n u_n = b$, para certos $a, b \in \mathbb{R}$, e mostremos que tem que ser $a = b$. Seja então $\delta > 0$, arbitrário. Da definição ($9a$), conclui-se que

$$\exists\, p_a, p_b \in \mathbb{N}: \quad n > p_a \implies |\, u_n - a \,| < \delta/2 \quad \wedge \quad n > p_b \implies |\, u_n - b \,| < \delta/2\,.$$

Pondo $p = \max\{p_a, p_b\}$, conclui-se que

$$n > p \implies (\;|\, u_n - a \,| < \delta/2 \;\wedge\; |\, u_n - b \,| < \delta/2\;),$$

donde, para $n > p$, podemos escrever

$$|\, b - a \,| = |\, b - u_n + u_n - a \,| \leq |\, u_n - b \,| + |\, u_n - a \,| < \; \delta/2 \, + \, \delta/2 \; = \; \delta,$$

resultando

$$\forall \delta > 0, \quad |\, b - a \,| < \delta$$

e, portanto, tem que ser $b = a$. ∎

Teorema 4
Se $(u_n)_n$ converge para a então toda a sua subsucessão converge também para a.

Demonstração:
Seja $(u_p)_p$ uma subsucessão de $(u_n)_n$. Como $\lim\limits_n u_n = a$, dado $\delta > 0$ arbitrário,

$$\exists\, p \in \mathbb{N}: \quad n > p \implies |\, u_n - a \,| < \delta$$

E pelo facto de a subsucessão possuir uma infinidade de termos com ordens crescentes, existe uma ordem n_p^* na subsucessão tal que $n_p^* > p$, tendo-se também

$$n_p > n_p^* > p \implies |\, u_{n_p} - a \,| < \delta.$$

Logo $\lim\limits_p u_{n_p} = a$. ∎

Consequências
Dos Teoremas 3 e 4 extraem-se algumas consequências especialmente úteis.

1) Se $(u_n)_n$ possui uma subsucessão divergente então $(u_n)_n$ é também divergente.

2) Se $(u_n)_n$ possui duas subsucessões convergentes para limites diferentes então $(u_n)_n$ é divergente.

3) Se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente possuindo uma subsucessão de limite a então $\lim\limits_n u_n = a$.

4) Se $\lim\limits_n u_n = a$ então, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_n u_{n+k} = a$. ■

Teorema 5

Toda a sucessão convergente é limitada.

Demonstração:

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão convergente tal que $\lim\limits_n u_n = a$. Da definição (9a-b), tomando em particular $\delta = 1$, sai que

$$\exists p_1 \in \mathbb{N}: \quad n > p_1 \implies |\, u_n - a \,| < 1,$$

donde

$$u_n \in \,]a-1, a+1[\,, \quad \forall n > p_1$$

e todos os termos da sucessão a partir da ordem p_1 estão no intervalo $]a-1, a+1[$. Ficaram fora do intervalo, eventualmente, apenas os termos da sucessão até à ordem p_1, que constituem um conjunto finito. Então, pondo $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_{p_1}, a-1, a+1\}$, e definindo $m = \min S$ e $M = \max S$, podemos concluir que

$$u_n \in [m, M]\,, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

significando que $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada. ■

Observação 2

(a) Do Teorema 5, resulta que toda a sucessão não limitada é divergente.

(b) A recíproca do Teorema 5 é falsa, isto é, nem toda a sucessão limitada é convergente.

Basta pensar na sucessão definida por $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, que é limitada mas divergente.

(c) Mas toda a sucessão limitada e monótona é convergente, como estabelece o Teorema 6 que enunciamos a seguir. ■

Teorema 6

Toda a sucessão limitada e monótona é convergente. Mais especificamente:

(a) se $(u_n)_n$ é limitada e crescente então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$;

(b) se $(u_n)_n$ é limitada e decrescente então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. ■

Demonstração:

(a) Seja $(u_n)_n$ uma sucessão limitada e crescente.

Então $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots$ e $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots\}$ é um conjunto limitado. Seja $a = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ e mostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Considere-se $\delta > 0$, arbitrário. Como a é o supremo de U, ele é o menor dos majorantes de U, pelo que $a-\delta$ não é um majorante de U, uma vez que $a-\delta<a$. Consequentemente,

$$\exists p\in\mathbb{N}: \quad a-\delta<u_p\,.$$

Como $(u_n)_n$ é crescente, tem-se $a-\delta<u_p\leq u_{p+1}\leq u_{p+2}\leq\cdots$, ou seja $a-\delta<u_n$, para todo $n\geq p$. Temos então $n\geq p\Longrightarrow a-\delta<u_n\leq a<a+\delta$, resultando, de facto, que $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.
A demonstração de (b) é semelhante. ■

Consequência

Dos Teoremas 2 e 6 resulta que, se uma sucessão monótona, $(u_n)_n$, possui uma subsucessão limitada então $(u_n)_n$ é convergente. De facto, do Teorema 2 sai que $(u_n)_n$ é limitada. Sendo limitada e monótona, $(u_n)_n$ é convergente, como garante o Teorema 6. ■

Estamos agora em condições de apresentar o seguinte resultado.

Teorema 7 [Bolzano–Weierstrass]

Toda a sucessão real limitada possui uma subsucessão convergente.

Demonstração

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão real limitada. Pelo Teorema 1, a sucessão $(u_n)_n$ possui uma subsucessão, $\left(u_{n_p}\right)_p$, que é monótona. Pela Propriedade 1(a), tal subsucessão é também limitada. Sendo limitada e monótona, a subsucessão $\left(u_{n_p}\right)_p$ é convergente. ■

1.4 Propriedades aritméticas dos limites

Vejamos agora alguns dos resultados mais simples sobre limites envolvendo as operaçõs aritméticas e a relação de ordem nos reais. Começamos com um resultado muito útil para o cálculo de limites.

Teorema 8

Se $\lim\limits_n u_n=0$ e $(v_n)_n$ é uma sucessão limitada então $\lim\limits_n\,(u_nv_n)=0$.

Demonstração:

Por um lado, existe $L>0$ tal que $|v_n|\leq L$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Por outro lado, dado arbitrariamente $\delta>0$, existe também $p\in\mathbb{N}$ tal que $n>p\implies |u_n|<\dfrac{\delta}{L}$.
Então, para $n>p$, tem-se sucessivamente

$$|u_nv_n|=|u_n|\,|v_n|\leq\frac{\delta}{L}L\,=\,\delta,$$

resultando que a sucessão $(u_nv_n)_n$ converge para 0. ■

Teorema 9 [Propriedades aritméticas dos limites]

Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões convergentes, tais que $\lim\limits_n u_n=a$ e $\lim\limits_n v_n=b$. Então:

(a) $\lim\limits_n\,(u_n+v_n)=a+b\,;$ (b) $\lim\limits_n\,(u_n-v_n)=a-b\,;$

(c) $\lim\limits_n\,(u_nv_n)=ab\,;$ (d) $\lim\limits_n\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)=\dfrac{a}{b}\,,$ sempre que $b\neq 0$.

Demonstração:

(a) Dado $\delta > 0$, qualquer, existem $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > p_1 \implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2} \quad \wedge \quad n > p_2 \implies |v_n - b| < \frac{\delta}{2}\,.$$

Então, pondo $p = \max\{p_1, p_2\}$, para $n > p$, tem-se sucessivamente

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| \leq |u_n - a| + |v_n - b| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

e conclui-se que a sucessão $(u_n + v_n)_n$ converge para $a + b$.

(b) Exercício. Seguir o raciocínio usado para demonstrar (a).

(c) Considere-se a nova sucessão $(z_n)_n$ definida por

$$z_n = u_n\, v_n - a\, b\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tem-se

$$z_n = u_n\, v_n - u_n b + u_n b - a\, b = u_n(v_n - b) + (u_n - a)\, b.$$

Por (b), sai que $\lim\limits_n\, (u_n - a) = 0$ e que $\lim\limits_n\, (v_n - b) = 0$.

Pelo Teorema 5, sendo $(u_n)_n$ convergente, ela é também limitada. E como a sucessão constante de termo geral igual a b é também limitada, do Teorema 8 conclui-se que $\lim\limits_n u_n(v_n - b) = 0$ e que $\lim\limits_n (u_n - a)b = 0$. Logo $\lim\limits_n z_n = 0$, ou seja, $\lim\limits_n u_n v_n = ab$.

(d) Considere-se a nova sucessão $(w_n)_n$ definida por

$$w_n = \frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tem-se

$$w_n = \frac{bu_n - av_n}{bv_n} = (bu_n - av_n)\,\frac{1}{bv_n}\,.$$

Por (a) e (c), sai que $\lim\limits_n\, (bu_n - av_n) = 0$. Vejamos que a sucessão $\left(\dfrac{1}{bv_n}\right)_n$ é limitada.

De facto, como $\lim\limits_n bv_n = b^2$, tem-se que

$$\forall \delta > 0,\ \exists p \in \mathbb{N}:\ n > p \implies |bv_n - b^2| < \delta.$$

Em particular para $\delta = b^2/2$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > q \implies \frac{b^2}{2} < bv_n < \frac{3b^2}{2} \implies bv_n > \frac{b^2}{2} > 0 \implies 0 < \frac{1}{bv_n} < \frac{2}{b^2}\,.$$

A partir da ordem q, *exclusive*, todos os termos da sucessão $\left(\dfrac{1}{bv_n}\right)_n$ estão em $\left]0, \dfrac{2}{b^2}\right[$.

Ficaram de fora, eventualmente, os termos até à ordem q. Pondo

$$M = \max\left\{\frac{1}{bv_1}, \frac{1}{bv_2}, \ldots, \frac{1}{bv_q}, \frac{2}{b^2}\right\},$$

tem-se $\left|\dfrac{1}{bv_n}\right| \leq M$, pelo que $\left(\dfrac{1}{bv_n}\right)_n$ é limitada. Pelo Teorema 8, resulta então que $\lim\limits_n w_n = 0$, ou seja, que $\lim\limits_n \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$.

■

Teorema 10 [Permanência do sinal]

(a) Se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente para a, com $a > 0$, então existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão $(u_n)_n$ são positivos.

(b) Se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente para b, com $b < 0$, então existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão $(u_n)_n$ são negativos.

(c) Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões convergentes tais que $\lim_n u_n = a$, $\lim_n v_n = b$ e que, a partir de uma certa ordem, se tem $u_n \leq v_n$. Então $a \leq b$.

(d) Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões convergentes tais que $\lim_n u_n = a$, $\lim_n v_n = b$, com $a < b$. Então existe uma ordem a partir da qual se tem $u_n < v_n$.

(e) Seja $(u_n)_n$ uma sucessão convergente tal que $\lim_n u_n = a$ e, a partir de uma certa ordem, se tem $u_n \leq b$. Então $a \leq b$.

Demonstração:

(a) Dado $\delta > 0$, arbitrário, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n > p \implies |u_n - a| < \delta$.
Em particular para $\delta = a$, existe $p^* \in \mathbb{N}$ tal que $n > p^* \implies 0 < u_n < 2a$.
Logo $u_n > 0$ para todo $n > p^*$.

(b) Exercício. Seguir o raciocínio de (a), tomando agora $\delta = -b$.

(c) Exercício. Supor $a > b$ e aplicar (a) à sucessão $(u_n - v_n)_n$, Chegar a um absurdo.

(d) Exercício. Aplicar (c) às sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ com $v_n = b, \forall n \in \mathbb{N}$. ∎

Teorema 11 [Sucessões enquadradas]
Sejam $(u_n)_n$ e $(w_n)_n$ sucessões convergentes tais que $\lim_n u_n = \lim_n w_n = a$. Seja $(v_n)_n$ outra sucessão tal que, a partir de uma certa ordem, se tem $u_n \leq v_n \leq w_n$. Então $(v_n)_n$ também é convergente e $\lim_n v_n = a$.
Demonstração:
Seja $\delta > 0$, arbitrário. Por hipótese,

$$\exists s, q \in \mathbb{N} : \; n \geq s \implies |u_n - a| < \delta \;\; \wedge \;\; n \geq q \implies |w_n - a| < \delta.$$

Por outro lado, também por hipótese,

$$\exists r \in \mathbb{N} : \; n \geq r \implies u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Seja $p = \max\{r, s, q\}$. Para $n > p$, tem-se

$$a - \delta < u_n \leq v_n \leq w_n < a + \delta.$$

Consequentemente,

$$\forall \delta > 0 \,, \; \exists p \in \mathbb{N} : \; n \geq p \implies |v_n - a| < \delta$$

ou seja, $\lim_n v_n = a$. ∎

Exercícios

1. Que pode dizer de $\lim_n u_n$ em cada um dos seguintes casos:

   (a) $(u_n)_n$ possui uma subsucessão convergente para a e outra convergente para b, com $b \neq a$;

   (b) $(u_n)_n$ possui duas subsucessões convergentes para a;

   (c) $(u_n)_n$ é tal que $(u_{2n})_n$ e $(u_{2n-1})_n$ convergem para a;

   (d) $(u_n)_n$ é decrescente e $u_n \geq -70$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

   (e) $(u_n)_n$ é crescente e de termos negativos;

   (f) $(u_n)_n$ é alternada e convergente;

   (g) $(u_n)_n$ é monótona e $(u_{3n})_n$ converge para a;

   (h) $(u_n)_n$ é uma sucessão crescente em $]2, 5[$.

2. Calcule, caso exista, o valor de

$$\lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}} \right).$$

[É erro frequente dizer-se que o limite proposto vale 0.] ■

1.5 Sucessão de Cauchy

Falaremos agora de um conceito novo que, em $\mathbb{R}$, permitirá decidir se uma sucessão é convergente, sem conhecer o seu limite. Dada uma sucessão $(u_n)_n$, dizemos que $(u_n)_n$ é uma *sucessão de Cauchy* quando todos os termos da sucessão estão arbitrariamente próximos uns dos outros, desde que se escolha uma ordem, na sucessão, suficientemente grande, isto é, quando

$$\forall \delta > 0, \;\; \exists p \in \mathbb{N}: \; m > p, \; n > p \implies |u_m - u_n| < \delta. \tag{10}$$

Vejamos como se relacionam os conceitos de sucessão convergente e sucessão de Cauchy, através dos seguintes resultados que passamos a apresentar.

Teorema 12
Se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente então $(u_n)_n$ é sucessão de Cauchy.

Demonstração
Suponhamos que $(u_n)_n$ é convergente com $\lim_n u_n = a$, para certo $a \in \mathbb{R}$. Da definição (9a-b), vem que

$$\forall \delta > 0\,, \, \exists p \in \mathbb{N}: \; n \geq p \implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2}\,.$$

Consequentemente, para $n > p$ e $m > p$, vem

$$|u_m - u_n| \leq |u_m - a| + |u_n - a| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

e conclui-se que $(u_n)_n$ é de Cauchy. ■

Teorema 13

Se $(u_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy então $(u_n)_n$ é limitada.

Demonstração
Por hipótese, para a sucessão $(u_n)_n$, vale a condição (10). Em particular, para $\delta = 1$,

$$\exists p \in \mathbb{N} : \ n > p \,,\ m > p \implies |u_m - u_n| < 1.$$

Fixando $n = p$, resulta que

$$\begin{aligned} m > p \quad &\implies \quad |u_m - u_{p+1}| < 1 \\ &\implies \quad u_m \in]u_{p+1} - 1, u_{p+1} + 1[\,, \end{aligned}$$

significando que todos os termos da sucessão, à excepção possivelmente dos p primeiros, estão em $]u_{p+1} - 1, u_{p+1} + 1[$. Pondo $\mathcal{U} = \{u_1, u_1, \ldots, u_p, u_{p+1} - 1, u_{p+1} + 1\}$, que é finito, e definindo

$$\alpha = \max \mathcal{U} \,, \qquad \beta = \min \mathcal{U},$$

tem-se então

$$u_n \in [\alpha, \beta] \,, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \,,$$

concluindo-se que $(u_n)_n$ é limitada. ■

Teorema 14

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de Cauchy possuindo uma subsucessão $\left(u_{n_p}\right)_p$ convergente para $a \in \mathbb{R}$. Então $(u_n)_n$ também é convergente para $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração
Seja $\delta > 0$ arbitrário. Por um lado, como $(u_n)_n$ é uma uma sucessão de Cauchy, da definição (10) sai que

$$\exists p \in \mathbb{N} : \ \ m > p \,,\ n > p \implies |u_m - u_n| < \frac{\delta}{2} \,.$$

Por outro lado, como $(u_{n_k})_k$ é convergente para $a \in \mathbb{R}$, da definição (9*a*-b), sai também que

$$\exists q \in \mathbb{N} : \ \ k > q \implies |u_{n_k} - a| < \frac{\delta}{2} \,.$$

Consequentemente, para $n > p,\ n_k > p,\ k > q$, tem-se

$$\begin{aligned} |u_n - a| \quad &\leq \quad |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - a| \\ &< \quad \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \ = \ \delta, \end{aligned}$$

concluindo-se que também $(u_n)_n$ é convergente para $a \in \mathbb{R}$. ■

Teorema 15

Se $(u_n)_n$ uma sucessão de Cauchy então $(u_n)_n$ é convergente.

Demonstração
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de Cauchy. Pelo Teorema 13, a sucessão $(u_n)_n$ é limitada e pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, Teorema 7, a sucessão $(u_n)_n$ possui uma subsucessão $\left(u_{n_p}\right)_p$ convergente para certo $a \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 14, a sucessão $(u_n)_n$ é convergente. ■

Propriedade 2 [Conclusão]
Em $\mathbb{R}$, uma sucessão é de Cauchy se e só se é convergente. ■

A conclusão estabelecida na Propriedade 2 será usada frequentemente. A vantagem em usar esta propriedade reside no facto de podermos mostrar que uma sucessão é convergente, sem conhecer o seu limite que, em geral, é um elemento "estranho" à sucessão.

Exercício
Diga, justificando, se cada umas das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) se $(a_n)_n$ é decrescente de termos positivos então $(a_n)_n$ é de Cauchy;

(b) se $(a_n)_n$ é tal que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ então $(a_n)_n$ não é de Cauchy;

(c) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são de Cauchy e tais que $|u_n - v_n| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim_n \dfrac{u_n}{v_n} = 1$;

(d) a sucessão $(1 + (-1)^n)_n$ é de Cauchy. ■

1.6 Estudo de algumas sucessões de relevo

Vamos dedicar este parágrafo ao estudo de algumas sucessões importantes.

Exemplo 5
Consideremos a sucessão definida por $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Mostremos que se trata de uma sucessão convergente e introduzamos o número e como o limite desta sucessão.

(i) $(a_n)_n$ é uma sucessão estritamente crescente, logo $a_n \geq a_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(a_n)_n$ é limitada. De facto, começando por reparar que $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ e que, portanto, $n! > 2^{n-1}$ para todo $n \geq 3$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2 \times 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2}} \quad = \quad 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad < \quad 3\,.
\end{aligned}$$

Conjugando esta conclusão com o que se viu em (i), sai que $2 \leq a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(*iii*) Por (*i*) e (*ii*), a sucessão $(a_n)_n$ é convergente (Teorema 6). Designamos por e o seu limite, a que se chama *número de Neper*,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right), \tag{11}$$

tendo-se necessariamente $2 \leq e \leq 3$. Concretamente, tem-se, com cinco casas decimais exactas, $e = 2,71828$. ■

Exemplo 6

Consideremos a sucessão definida por $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que se trata de uma sucessão convergente e vejamos que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, com $(a_n)_n$ a sucessão do Exemplo 5, ou seja que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^n = e\,. \tag{12}$$

(*i*) A fórmula do binómio de Newton permite escrever

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \frac{1}{n^k},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}, \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\,\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n} + \cdots + \frac{1}{n!}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n} \cdots \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} b_n &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

A expressão obtida em (13) para b_n será extremamente útil no estudo que faremos da sucessão $(b_n)_n$.

(*ii*) $(b_n)_n$ é crescente. De facto, de (13), sai

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

resultando $b_{n+1} > b_n$, uma vez que b_{n+1} possui mais uma parcela do que b_n e que cada parcela de b_{n+1} é superior à parcela correspondente de b_n. Portanto, $b_n \geq b_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) $(b_n)_n$ é limitada. Da expressão (13) e do que vimos no Exemplo 5, (ii), resulta

$$b_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3. \tag{15}$$

Consequentemente, $2 \leq b_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) Sendo crescente e limitada, a sucessão $(b_n)_n$ é convergente (Teorema 6). Vejamos que o seu limite é igual a e. Por um lado, da condição (15), resulta que

$$\lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e\,. \tag{16}$$

Por outro lado, se no segundo membro da expressão (13) considerarmos apenas p parcelas, com $p \in \{2, 3, \ldots, n\}$, fixo, podemos escrever

$$\begin{aligned} b_n \quad \geq \quad & 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ & + \cdots + \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \end{aligned}$$

e tomando o limite quando $n \longrightarrow +\infty$ (p fixo), vem

$$\lim_{n\to\infty} b_n \;\geq\; 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{p!}\,.$$

Tomando agora o limite quando $p \longrightarrow +\infty$, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e\,. \tag{17}$$

As conclusões (16) e (17) asseguram o resultado (12) que pretendíamos demonstrar.

■

Observação 3

O resultado do Exemplo 6 estende-se a casos mais gerais. Não é difícil reconhecer que (*cf.* [1], Cap. II, Parte 1, Secção 5):

- se $(u_n)_n$ é uma sucessão que tende para $+\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_n \left(1 + \frac{\alpha}{u_n}\right)^{u_n} = e^{\alpha}\,; \tag{18}$$

- se $\lim_n u_n = +\infty$ e $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente para a então

$$\lim_n \left(1 + \frac{a_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^{a}. \tag{19}$$

■

Exemplo 7
Consideremos a sucessão definida por $c_n = \sqrt[n]{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $a \in \mathbb{R}^+$. Mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{10}$$

(a) Suponhamos que $a = 1$.

A sucessão é constante com todos os termos iguais a 1, pelo que a conclusão é imediata.

(b) Suponhamos, agora, que $a > 1$.

Trata-se de uma sucessão decrescente, uma vez que

$$a > 1 \implies a^{n+1} > a^n \implies \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n(n+1)} > \left(\sqrt[n+1]{a}\right)^{n(n+1)} \implies \sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a},$$

e limitada inferiormente, já que $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $(c_n)_n$ é limitada, tendo-se $a \geq \sqrt[n]{a} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então (Teorema 6), $(c_n)_n$ é convergente e existe $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \inf\left\{\sqrt[n]{a} : n \in \mathbb{N}\right\} \geq 1$. Vamos determinar o valor de ℓ como o limite de uma subsucessão de $(c_n)_n$ escolhida convenientemente e necessariamente convergente para ℓ, pelo Teorema 4. Consideremos então a subsucessão de $(c_n)_n$ constituída pelos termos

$$a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{6}},\ a^{\frac{1}{12}},\ a^{\frac{1}{20}},\ \ldots,\ a^{\frac{1}{n(n+1)}},\ \ldots$$

Atendendo a que se pode escrever $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, vem

$$a^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}.$$

Então (Teorema 9 (d))

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{\ell}{\ell},$$

que dá precisamente $\ell = 1$.

(c) Suponhamos, finalmente, que $a > 1$.

Este caso trata-se de maneira semelhante ao caso de (b). ■

Exemplo 8
Consideremos a sucessão definida por $d_n = \sqrt[n]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{11}$$

(i) A sucessão $(d_n)_n$ é crescente, a partir de uma certa ordem, mais precisamente

$$d_n \geq d_{n+1},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{ com } \ n \geq 3.$$

De facto, temos sucessivamente

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1} \quad & \Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt[n]{n}\right)^{n(n+1)} \geq \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{n(n+1)} \\
& \Longleftrightarrow \quad n^{n+1} \geq (n+1)^n \\
& \Longleftrightarrow \quad n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,
\end{aligned}
$$

o que é verdade para todo $n \geq 3$, como se viu nio Exemplo 6.

(ii) A sucessão $(d_n)_n$ é limitada. De facto, por um lado, $n \geq 1 \Longrightarrow n^{1/n} \geq 1^{1/n} = 1$, donde $d_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, do que se viu em (i), sai $d_n \leq \max\{d_1, d_2, d_3\}$.

(iii) Sendo limitada e monótona (ainda que seja a partir da ordem 3), a sucessão $(d_n)_n$ é convergente. Seja ℓ o seu limite. Ter-se-á $\ell \geq 1$. Vamos determinar o valor de ℓ como o limite de uma subsucessão de $(d_n)_n$ definida oportunamente. Seja ela a sucessão constituída pelos termos $\sqrt{2}\,,\ \sqrt[4]{4}\,,\ \sqrt[6]{6}\,,\ \ldots,\ \sqrt[2n]{2n}\,,\ \ldots$ Temos

$$
\ell^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} = \ell,
$$

onde, na última igualdade, usámos o reultado do Exemplo 7. Logo $\ell = 1$. ■

Exercício

Determine, caso exista, $\lim\limits_{n} u_n$, para:

(a) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$; (b) $u_n = \left(\dfrac{n-3}{n+3}\right)^{3n}$; (c) $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{n+2}\right)^n$;

(d) $u_n = \sqrt[n]{n^2+7}$; (e) $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{2}{n^2}}$; (f) $u_n = (-1)^n \sqrt[n]{\dfrac{\pi}{n}}$.

■

1.7 Limites infinitos

Dizemos que uma sucessão $(u_n)_n$ tende para $+\infty$ quando todos os termos da sucessão são arbitrariamente grandes a partir de uma certa ordem p suficientemente "alta", isto é, quando

$$
\forall A > 0\,,\ \exists p \in \mathbb{N}:\ n > p \Longrightarrow u_n > A. \tag{12}
$$

Significa que todos os termos da sucessão, à excepção, possivelmente, de um número finito, são superiores a qualquer número real arbitrariamente grande. Neste caso, embora $(u_n)_n$ seja uma sucessão divergente, adoptamos o mesmo tipo de notação usada para o limite real definido em (9a-b), escrevendo

$$
\lim_n u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \longrightarrow +\infty\,. \tag{13}
$$

Exemplo 9

(*a*) $\lim\limits_{n}\,(n+1)=+\infty$.

Dado $A>0$, basta tomar $p=[A-1]+1$ ($[x]$ designa a parte inteira de x).

(*b*) $\lim\limits_{n} n^2=+\infty$.

Dado $A>0$, basta tomar $p=[\sqrt{A}]+1$.

(*c*) $\lim\limits_{n}\sqrt{n}=+\infty$.

Dado $A>0$, basta tomar $p=[A^2]+1$. ■

Teorema 16
Toda a sucessão crescente e não limitada tende para $+\infty$.

Para a demonstração, *cf.* a bibliografia recomendada. ■

Analogamente, dizemos que uma sucessão $(u_n)_n$ tende para $-\infty$, quando todos os seus termos, a partir de uma ordem p suficientemente "alta", são negativos e arbitrariamente grandes em valor absoluto, isto é, quando

$$\forall A>0\,,\ \ \exists p\in\mathbb{N}:\ n>p\implies u_n<-A. \tag{14}$$

Significa que os termos da sucessão, à excepção, possivelmente, de um número finito, são inferiores a qualquer número real negativo, arbitrariamente fixado. Escrevemos

$$\lim_{n} u_n=-\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n\longrightarrow-\infty\,. \tag{15}$$

Exemplo 10

(*a*) $\lim\limits_{n}\left(\dfrac{1}{2}-n\right)=-\infty$.

Dado $A>0$, basta tomar $p=\left[A+\dfrac{1}{2}\right]+1$.

(*b*) $\lim\limits_{n}\,(-\mathrm{e}^n)=-\infty$.

Dado $A>0$, basta tomar $p=[\ln A]+1$.

1. (*c*)] $\lim\limits_{n}\sqrt[3]{-n^2}=-\infty$.

   Dado $A>0$, basta tomar $p=[\sqrt{A^3}]+1$. ■

Teorema 17
Toda a sucessão decrescente e não limitada tende para $-\infty$.

Para a demonstração, *cf.* a bibliografia recomendada. ■

Para os limites infinitos valem os seguintes resultados que passamos a enunciar e que não demonstraremos (*cf.* a referência bibliográfica [5]).

Teorema 18 [Operações aritméticas com limites infinitos]
Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões reais.

(a) Se $\lim_n u_n = +\infty$ e $(v_n)_n$ é limitada inferiormente então $\lim_n (u_n + v_n) = +\infty$.

(b) Se $\lim_n u_n = +\infty$ e existem $c \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{N}$ tais que $v_n > c$ para todo $n > p$ então $\lim_n u_n v_n = +\infty$.

(c) Se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $u_n > 0$ para todo $n > p$, então

$$\lim_n u_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_n \frac{1}{u_n} = +\infty\,. \tag{16}$$

(d) Se existem $c \in \mathbb{R}^+$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $u_n > c$ para todo $n > p$ e se $\lim_n v_n = 0$, então $\lim_n \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

(e) Se $(u_n)_n$ é limitada e $\lim_n v_n = +\infty$, então $\lim_n \frac{u_n}{v_n} = 0$. ■

Observação 4
Com as devidas adaptações, é válido um resultado análogo ao Teorema 18 para sucessões que tendem para $-\infty$ (*cf.* a referência bibliográfica [5]). ■

Teorema 19 [Comparação de sucessões com limites infinitos]
Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões reais para as quais

$$\exists p \in \mathbb{N}: \quad u_n \leq v_n, \quad \forall n \geq p\,.$$

(i) Se $\lim_n u_n = +\infty$ então $\lim_n v_n = +\infty$.

(ii) Se $\lim_n v_n = -\infty$ então $\lim_n u_n = -\infty$. ■

Observação 5 [Notas finais]
(a) No cálculo de limites de sucessões, algumas indeterminações comuns são

$$\frac{0}{0}\,, \quad \infty - \infty\,, \quad 0 \times \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad 0^0\,, \quad \infty^0\,, \quad 1^\infty.$$

(b) É útil saber que (para a demonstração, *cf.* a bibliografia recomendada):

$$\lim_n \frac{e^n}{n^k} = +\infty\,, \quad \forall k \in \mathbb{R}; \tag{17a}$$

$$\lim_n \frac{n}{(\ln n)^k} = +\infty\,, \quad \forall k \in \mathbb{R}; \tag{17b}$$

$$\lim_n \frac{\operatorname{sen} u_n}{u_n} = 1\,, \quad \text{sempre que } \lim_n u_n = 0 \text{ e } u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{17c}$$

■

2 Séries de números reais

Nesta secção, vamos lidar com expressões do tipo

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,, \tag{18}$$

no sentido de atribuir um significado matemático rigoroso à operação de adição com um número infinito de parcelas. Comecemos por observar que não podemos estender trivialmente as propriedades referidas no Capítulo 1, sobre a adição no corpo dos reais com um número finito de parcelas. De facto, suponhamos que pretendemos calcular o valor da soma

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{19}$$

Associando as parcelas duas a duas, escreveríamos

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \tag{20a}$$

e seríamos levados a concluir que $S = 0$. Se agora destacarmos a primeira parcela e associarmos as restantes duas a duas, escrevemos

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \tag{20b}$$

e já somos levados a pensar que será $S = 1$. E poderíamos ainda destacar simplesmente a primeira parcela, resultando

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S, \tag{20c}$$

donde $S = 1/2$. É então claro que estas "manobras" não levaram a qualquer conclusão sobre o valor de S. Aquilo que somos levados a pensar é que as referidas propriedades do Capítulo 1, em particular a propriedade associativa, não são válidas quando estendemos a adição a um número infinito de parcelas. Para dar sentido à expressão (18), iremos recorrer à noção de limite, como ficará claro na próxima subsecção.

2.1 Definições e consequências

Considere-se uma sucessão $(u_n)_n$ de números reais. À expressão $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, que representa uma soma com um número infinito de parcelas, chamamos *série numérica de termo geral* u_n ou *série numérica gerada* por u_n. Usamos as notações

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,, \quad \sum_{n\geq 1} u_n \,, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \,, \quad \sum_{n} u_n \,. \tag{21}$$

A sucessão $(u_n)_n$ diz-se a *sucessão geradora* da série.

Dada a série gerada por $(u_n)_n$, construa-se uma nova sucessão $(s_n)_n$, pondo

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &\vdots \end{aligned} \tag{22}$$

a que chamamos *sucessão das somas parciais* da série. Dizemos que a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é *convergente* quando a correspondente sucessão das somas parciais é convergente, ou seja, quando

$$\exists\, S \in \mathbb{R}: \quad S = \lim_n s_n. \tag{23}$$

Escrevemos $S = \sum_{n\geq 1} u_n$ e dizemos que S é a *soma* da série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Por outro lado, se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ não é convergente, dizemos que ela é *divergente*.

Uma série poderá ser divergente quando a correspondente sucessão das somas parciais é não limitada ou quando oscila entre alguns valores. A última possibilidade será de excluir quando todos os termos da série têm o mesmo sinal.

Exemplo 11

(a) Consideremos a série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}$.

A correspondente sucessão geradora é $u_n = (-1)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e a sucessão das somas parciais é $s_n = 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $s_{2n} = 0$ e $s_{2n-1} = 1$, pelo que $(s_n)_n$ não tem limite. Logo, a série é divergente.

(b) Consideremos agora a série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

A sucessão geradora é $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e a sucessão das somas parciais é $s_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $\lim_n s_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, e a série é convergente, possuindo soma $S = 1/2$.

(c) Consideremos finalmente a série $\sum_{n\geq 1} n$.

Tem-se $u_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1+n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então $\lim_n s_n = +\infty$ e a série é divergente.

■

Das definições apresentadas extraem-se as seguintes consequências.

Consequência 1

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries convergentes de somas s e t, respectivamente. Então:

(a) a série $\sum_{n\geq 1} (u_n + v_n)$ converge e tem soma $s+t$;

(b) a série $\sum_{n\geq 1} \alpha u_n$ converge e tem soma αs, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Consequência 2

Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente então, dado $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a série $\sum_{n\geq 1} \alpha u_n$ também é divergente.

Consequência 3

Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ convergente e $\sum_{n\geq 1} v_n$ divergente. Então $\sum_{n\geq 1} (u_n + v_n)$ é divergente.

Demonstração

1. Basta atender a que, se $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ forem as sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$, respectivamente, então $(s_n + t_n)_n$ será a sucessão das somas parciais de $\sum_{n\geq 1} (u_n+v_n)$ e $(\alpha s_n)_n$ a de $\sum_{n\geq 1} \alpha u_n$. Como $\lim_n s_n = s$ e $\lim_n t_n = t$, vem $\lim_n s_n + t_n = s+t$ e $\lim_n \alpha s_n = \alpha s$.

2. Se a série $\sum_{n\geq 1} \alpha u_n$, com $\alpha \neq 0$, fosse convergente, também o seria a série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha}(\alpha u_n)$, ou seja, a série $\sum_{n\geq 1} u_n$, contrariando a hipótese. Logo $\sum_{n\geq 1} \alpha u_n$ é divergente.

3. Se a série $\sum_{n\geq 1} (u_n+v_n)$ fosse convergente, também seria convergente a série $\sum_{n\geq 1} [(u_n + v_n) - u_n]$, o que é falso. Logo, a série $\sum_{n\geq 1} (u_n + v_n)$ é divergente.

■

Observação 6

Se as séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ forem divergentes, nada se pode concluir, em geral, sobre a natureza da série $\sum_{n\geq 1} (u_n + v_n)$. De facto, mais adiante, será fácil reconhecer que as séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n+1}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+2}$ são divergentes, que a série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ é convergente e que a série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right)$ é divergente. ■

2.2 Primeiros resultados sobre convergência

Começamos esta subsecção com um resultado fundamental, muito útil no estudo da convergência de séries.

Teorema 20 [Condição necessária de convergência]
Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim_n u_n = 0$.

Demonstração
Seja $(s_n)_n$ a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n\geq 1} u_n$. Da definição (23), tratando-se de uma série convergente, tem-se $\lim_n s_n = s$, para algum $s \in \mathbb{R}$. Como também $\lim_n s_{n-1} = s$, vem

$$\lim_n u_n = \lim_n \,(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0,$$

completando-se a demonstração. ■

Em geral, pretendemos estudar a natureza da série $\sum_{n\geq 1} u_n$, pelo que o Teorema 20 é útil quando o passamos à seguinte forma equivalente.

Corolario 1 [Condição suficiente de divergência (ou teste da divergência)]
Se a sucessão $(u_n)_n$ não tem limite ou se $\lim_n u_n = \ell$, com $\ell \neq 0$, então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente. ■

Observação 7
O recíproco do Teorema 20 é obviamente falso. Isto é,

$$\lim_n u_n = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} u_n \ \text{ convergente.} \tag{24}$$

Cf. o exemplo clássico do parágrafo 2.3 B, relativo à série harmónica (28). ■

Exemplo 12

(a) Relativamente à série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}$ do Exemplo 11, tem-se que $\nexists \lim_n (-1)^{n-1}$.

(b) A série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ é divergente porque $\lim_n \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$.

(c) A série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \operatorname{sen} n$ é divergente porque $\nexists \lim_n \left((-1)^n \operatorname{sen} n\right)$.

(d) A série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2n+5}$ é divergente porque $\lim_n \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

(e) Do Teorema 20, nada se pode concluir, por exemplo, sobre a natureza das séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, já que $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ e $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$.

■

Outro resultado muito útil obtém-se da definição de convergência de uma série e da Consequência 4 do Teorema 4 sobre sucessões, apresentado na Secção 1.

Teorema 21

Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões que diferem, quando muito, num número finito de termos. Então as séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza. ■

Observação 8

O Teorema 21 estabelece que se uma das séries converge então a outra também converge e se uma das séries diverge então a outra também diverge. Equivalentemente, significa que a natureza de uma série não depende dos seus k primeiros termos, por maior que seja k. ■

Exemplo 13

(a) A série $\sum_{n\geq 1} u_n$ com $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 2006 \\ (3/2)^n & \text{se } n > 2006 \end{cases}$ é divergente.

De facto, pelo Teorema 21, conclui-se que a série proposta tem a mesma natureza que a série estudada no Exemplo 12 (b).

(b) A série $\sum_{n\geq 1} w_n$ com $w_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } n \leq 100 \\ (1/3)^n & \text{se } n > 100 \end{cases}$ é convergente.

Do Teorema 21 sai que esta série é da mesma natureza que a série do Exemplo 11 (b). ■

2.3 Resultados sobre algumas séries particulares

Vamos agora estudar, a partir da definição, algumas séries clássicas de relevo. Como iremos ver ao longo desta Secção 2, o conhecimento da natureza destas séries será muito útil no estudo de outras séries.

A - Série geométrica

Chama-se *série geométrica de razão* r a uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

A sucessão geradora, $(u_n)_n$, é definida por $u_n = r^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, e a sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é definida por $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$. Para $r = 1$ tem-se $s_n = n$ e para $r \neq 1$, como também $rs_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$, sai que $s_n - rs_n = 1 - r^n$, donde

$$s_n = \begin{cases} n & \text{se } r = 1 \\ \dfrac{1-r^n}{1-r} & \text{se } r \neq 1. \end{cases} \tag{26}$$

Da definição de convergência de uma série, do Teorema 20 e do correspondente Corolário 1, sai que:

$$r = 1 \implies \text{série divergente, porque } u_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e } \lim_n u_n = 1 \neq 0$$
$$\text{(além disso, tem-se } \lim_n s_n = \lim_n n = +\infty\text{);}$$

$$r > 1 \implies \text{série divergente, porque } \lim_n u_n = \lim_n r^{n-1} = +\infty$$
$$\text{(além disso, como } \lim_n r^n = +\infty\,,\ \text{vem } \lim_n s_n = +\infty\text{);}$$

$$r \leq -1 \implies \text{série divergente, porque } \nexists \lim_n u_n = \lim_n r^{n-1}$$
$$\text{(neste caso, também não existe } \lim_n s_n\text{);}$$

$$-1 < r < 1 \implies \text{série convergente com soma } s = \frac{1}{1-r}\,,\ \text{porque } \lim_n s_n = \frac{1}{1-r}$$
$$\text{(repare-se que } \lim_n r^n = 0\text{).}$$

Conclusão A

A série geométrica de razão r definida pela expressão (25) é convergente se e só se $|r| < 1$. Em caso de convergência, a sua soma é $s = \dfrac{1}{1-r}$. ∎

Exemplo 14

(a) $\displaystyle\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ é convergente com soma $s = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 2\,.$

(b) $\displaystyle\sum_n \left(-\frac{5}{4}\right)^n = -\frac{5}{4}\sum_n \left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1}$ é divergente porque $r = -\dfrac{5}{4}$ e , portanto, $|r| > 1$.

(c) $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n + 4^{n+1}}{3^{n+2}}$ é divergente porque esta série pode escrever-se na forma

$$\sum_n \left[-\frac{1}{3^3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{4^2}{3^3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right],$$

onde $\displaystyle\sum_n \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente e $\displaystyle\sum_n \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ é divergente

(Consequência 3, Subsecção 2.1).

∎

Observação 9

Mais em geral, uma série geométrica de razão r apresenta a forma

$$\sum_{n=p}^{+\infty} ar^{n+k}\,, \quad a, r \in \mathbb{R}\,,\ a \neq 0\,,\ p \in \mathbb{N}\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \tag{27}$$

representando a soma

$$ar^{p+k} + ar^{p+k+1} + ar^{p+k+2} + \cdots = ar^{p+k}\left(1 + r + r^2 + \cdots\right),$$

e tem a mesma natureza que as séries $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} r^{n+k}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}$. Então a série (27) converge se e só se $|r|<1$. Em caso de convergência, a sua soma é $s = ar^{p+k}\dfrac{1}{1-r}$. ■

Exemplo 15

$\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 5\left(-\frac{3}{7}\right)^{n+2}$ é convergente com soma $s = 5\left(-\dfrac{3}{7}\right)^5 \dfrac{1}{1-\left(-\frac{3}{7}\right)} = -\dfrac{3^5}{2\cdot 7^4}$.

■

B - Série harmónica

Trata-se da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tag{28}$$

com sucessão geradora, $(u_n)_n$, definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, definida por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,. \tag{29}$$

Vejamos que $(s_n)_n$ é divergente, analisando a subsucessão constituída pelos termos

$$s_2\,,\ s_4\,,\ s_8\,,\ s_{16}\,,\ s_{32}\,,\ \ldots\,,\ s_{2^n}\,,\ \ldots$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&\quad + \left(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\
&> 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + 16\cdot\frac{1}{32} + \cdots + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} = 1 + n\cdot\frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

conclui-se que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = +\infty$, pelo que $(s_n)_n$ é divergente.

Conclusão B

A série harmónica, definida pela expressão (28), é divergente. ■

C - Série de Riemann

Chama-se série de Riemann (de expoente $r > 0$) a uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\,r}}\ ,\ r \in \mathbb{R}^+, \tag{30}$$

cuja sucessão geradora é definida por $u_n = \dfrac{1}{n^r}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A correspondente sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é dada por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r}\,. \tag{31}$$

(i) Se $r = 1$ então a série (30) reduz-se à série harmónica e, portanto, é divergente.

(ii) Se $0 < r < 1$ então

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Então $\lim\limits_n s_n = +\infty$ porque, como se viu no parágrafo B sobre a série harmónica, $\lim\limits_n \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$. A correspondente série de Riemann é divergente.

1. (iii)] Para $r > 1$, consideremos a subsucessão de $(s_n)_n$ constituída pelos termos $s_1,\ s_3,\ s_7,\ s_{15},\ s_{31},\ \ldots,\ s_{2^n-1},\ \ldots$ Atendendo a que

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^r} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \cdots + \frac{1}{7^r}\right) + \left(\frac{1}{8^r} + \cdots + \frac{1}{15^r}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^r}\right), \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &< 1 + 2\cdot\frac{1}{2^r} + 2^2\cdot\frac{1}{4^r} + 2^3\cdot\frac{1}{8^r} + \cdots + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{(2^n-1)^r} \\ &= 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{2^2}{(2^2)^r} + \frac{2^3}{(2^3)^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^r} \\ &= 1 + \frac{2}{2^r} + \left(\frac{2}{2^r}\right)^2 + \left(\frac{2}{2^r}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{2^r}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\dfrac{2}{2^r}\right)^n}{1-\dfrac{2}{2^r}} \stackrel{\text{def}}{=} w_n. \end{aligned}$$

Como $r > 1$, resulta que $\lim\limits_n w_n = 1/(1-2/2^r)$ e, portanto, $(w_n)_n$ é uma sucessão convergente sendo, em particular, limitada. Assim, será também limitada a sucessão $(s_{2^n-1})_n$. Pelo Teorema 2, sai que $(s_n)_n$ é limitada e, pelo Teorema 6, sendo monótona e limitada, sai que $(s_n)_n$ é convergente Conclui-se, finalmente, que, para $r > 1$, a correspondente série de Riemann é convergente.

Conclusão C
A série de Riemann (de expoente $r > 0$), definida pela expressão (30), é convergente se e só se $r > 1$. $\blacksquare$

Exemplo 16

(a) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^5}$ converge porque $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5}$ é uma série de Riemann convergente.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge porque é uma série de Riemann de expoente $1/2$.

(c) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2\sqrt[3]{n^5}+3\sqrt{n}}{n^2}$ diverge, porque $\displaystyle\frac{2\sqrt[3]{n^5}+3\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{1/3}} + \frac{3}{n^{3/2}}$, sendo $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/3}}$ uma série de Riemann divergente e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ uma série de Riemann convergente.

(d) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{8}{3n^5} + \frac{1}{4^n}\right)$ converge porque $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5}$ é uma série de Riemann convergente e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n}$ é uma série geométrica convergente.

$\blacksquare$

D - Série de Mengoli (ou telescópica)

Chama-se série de Mengoli a uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p}), \quad p \geq 1, \tag{33}$$

onde $(a_n)_n$ é uma sucessão qualquer. Para estas séries, é possível estudar a sucessão das somas parciais de uma forma muito simples. Consideremos, a título de exemplo, a seguinte série de Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right). \tag{34}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}, \tag{35}$$

donde $\lim\limits_n s_n = 3/2$ e conclui-se que a série de Mengoli com a expressão (34) é convergente e tem soma $S = 3/2$. Todas as séries de Mengoli se estudam desta forma.

Para a série com a expressão geral (33), vem

$$\begin{aligned} s_n \;=\; & (a_1 - a_{p+1}) + (a_2 - a_{p+2}) + (a_3 - a_{p+3}) + \cdots \\ & + (a_p - a_{2p}) + (a_{p+1} - a_{2p+1}) + (a_{p+2} - a_{2p+2}) + \cdots \\ & + (a_{n-2} - a_{n+p-2}) + (a_{n-1} - a_{n+p-1}) + (a_n - a_{n+p}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}), \tag{36}$$

pelo que, existe $\lim\limits_n s_n$ se e só se existe $\lim\limits_n (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p})$, ou seja, se e só se existe $\lim\limits_n a_n$. Então a série converge quando e só quando a sucessão $(a_n)_n$ também converge, caso em que a soma da série é precisamente o valor S do limite da expressão no segundo membro de (36).

Conclusão D
A série de Mengoli definida pela expressão (33) é convergente se e só se a correspondente sucessão $(a_n)_n$ é convergente. Em caso de convergência, a soma da série é

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \lim_n a_n. \tag{37}$$

■

Exemplo 17
Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(n+1)}$.

Comecemos por verificar que o termo geral da série se escreve na forma

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{38}$$

com A e B constantes reais a determinar. De facto, a igualdade em (38) é válida quando

$$1 = A(n+1) + Bn \implies 1 = (A+B)n + A \implies \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = -1. \end{cases}$$

Então a série dada é uma série de Mengoli da forma $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, pelo que

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{e} \qquad \lim_n s_n = 1.$$

Consequentemente, a série proposta é convergente e a sua soma é $S = 1$.

■

2.4 Séries de termos não negativos

Neste parágrafo, vamos concentrar-nos num tipo particular de séries, a saber

$$\sum_{n\geq 1} u_n\,, \quad \text{com} \quad u_n \geq 0\,,\ \ \forall n\in\mathbb{N}, \tag{39}$$

para as quais a sucessão $(s_n)_n$ das somas parciais é monótona crescente, já que

$$s_n \;=\; s_{n-1}+u_n \;\geq\; s_{n-1}\,, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Da definição (23) de convergência de uma série e dos Teoremas 5 e 6 sobre sucessões, sai que uma série do tipo (39) é convergente se e só se a correspondente sucessão $(s_n)_n$ é majorada. De facto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} u_n \text{ convergente} \quad &\Longleftrightarrow \quad (s_n)_n \text{ convergente} \\
&\Longleftrightarrow \quad (s_n)_n \text{ limitada} \quad \text{[porque } (s_n)_n \text{ é monótona]} \\
&\Longleftrightarrow \quad (s_n)_n \text{ majorada} \quad \text{[porque } (s_n)_n \text{ é crescente]}
\end{aligned} \tag{40}$$

Esta conclusão é crucial para estabelecer os chamados *critérios de convergência* de uma série de termos positivos, que se baseiam, exclusivamente, na sucessão geradora da série.

A - Critérios de comparação

Recorrendo a uma comparação com o termo geral de uma série conhecida, a aplicação de um dos seguintes critérios permite concluir, de forma muito simples, a natureza de uma vasta classe de séries numéricas.

Teorema 22 [Primeiro Critério de Comparação]
Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos não negativos tais que

$$\exists p\in\mathbb{N}:\ n\geq p \implies u_n\leq v_n\,.$$

(a) Se $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também converge.

(b) Equivalentemente, se $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge então $\sum_{n\geq 1} v_n$ também diverge.

Demonstração
Sejam $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ as sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$, respectivamente.
Para $n>p$, tem-se

$$\begin{aligned}
s_n \;&=\; (u_1+\cdots+u_p)+(u_{p+1}+\cdots+u_n) \\
&\leq\; s_p+(v_{p+1}+\cdots+v_n) \\
&=\; s_p+t_n-t_p,
\end{aligned}$$

donde

$$s_n\leq s_p+t_n. \tag{41}$$

(a) Se $\sum\limits_n v_n$ é convergente então $(t_n)_n$ é majorada. Por (41), também $(s_n)_n$ é majorada, sendo a correspondente série, $\sum\limits_n u_n$, uma série convergente.

(b) Suponhamos agora que $\sum\limits_n u_n$ é divergente.

Se $\sum\limits_n v_n$ fosse convergente, por (a), concluir-se-ia que também $\sum\limits_n v_n$ seria convergente, o que é absurdo. Logo, a série $\sum\limits_n v_n$ é divergente. ■

Exemplo 18

(a) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2+(-1)^n}{n^3}$ é convergente, porque:

- $\dfrac{2+(-1)^n}{n^3} \leq \dfrac{3}{n^3}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{3}{n^3}$ é convergente, uma vez que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^3}$ é uma série de Riemann convergente.

(b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\log\sqrt{n}}{n}$ é divergente, porque

$\dfrac{\log\sqrt{n}}{n} > \dfrac{1}{n}$, para $n \geq 8$, e $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ é divergente.

(c) Sobre a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n+1}$, fazendo a comparação $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o Teorema 22 não permite extrair conclusões, uma vez que a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ é divergente ■

Na prática, nem sempre é fácil usar o critério do Teorema 22 porque ele depende fortemente de uma comparação da do tipo apresentado no enunciado. É o caso do Exemplo 18 (c). Por esta razão, resulta muito útil o critério que se apresenta a seguir e que se obtém como consequência do anterior, passando à formulação em termos de limite.

Teorema 23 [Segundo Critério de Comparação]
Sejam $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ e $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim\limits_n \dfrac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty]$.

(a) Se $\ell \neq 0$ e $\ell \neq +\infty$ então as séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ e $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

(b) Se $\ell = 0$ e $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge então $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ também converge.

Equivalentemente, se $\ell = 0$ e $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge então $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ também diverge.

(c) Se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também diverge.

Equivalentemente, se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge então $\sum_{n\geq 1} v_n$ também converge.

Demonstração

(a) Por hipótese, temos que $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - \ell \right| < \delta$, ou seja,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \; n > p \Longrightarrow -\delta + \ell < \frac{u_n}{v_n} < \delta + \ell.$$

Em particular, para $\delta = \ell/2$, vem que $\exists p \in \mathbb{N}, n > p \Longrightarrow \frac{\ell}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3\ell}{2}$, donde

$$n > p \;\Longrightarrow\; \frac{\ell}{2}\, v_n < u_n < \frac{3\ell}{2}\, v_n$$

e, pelo Teorema 22, conjugado com as consequências estabelecidas na Subsecção 2.1, conclui-se que as séries em causa possuem a mesma natureza.

(b) Por hipótese, temos que $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \frac{u_n}{v_n} < \delta$. Para $\delta = 1$, vem que $\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow u_n < v_n$. Pelo Teorema 22, a conclusão é imediata.

(c) Por hipótese, temos que $\forall A > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \frac{u_n}{v_n} > A$. Para $A = 1$, vem que $\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \frac{u_n}{v_n} > 1 \Longrightarrow v_n < u_n$. Pelo Teorema 22, a conclusão é imediata ■

Exemplo 19

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ é divergente.

Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é uma série divergente e $\lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, o Teorema 23 permite concluir que a série apresentada é divergente.

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{1+n^3}$ é convergente.

Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Riemann convergente e $\lim_n \frac{\frac{n}{1+n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{1+n^3} = 1$, o Teorema 23 permite concluir que a série dada é convergente.

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\sqrt{1+n^5}}$ é convergente.

Vamos comparar com a série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$, que é convergente. Tem-se

$$\lim_n \frac{\frac{n}{\sqrt{1+n^5}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \frac{n^{5/2}}{\sqrt{1+n^5}} \lim_n \sqrt{\frac{n^5}{1+n^5}} = 1,$$

donde, pelo Teorema 23, sai que a série dada é convergente.

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^2}$ é convergente.

- Por ser $\displaystyle\lim_n \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \log n = +\infty$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ uma série de Riemann convergente, o Teorema 23 não permite estabelecer conclusões sobre a natureza da série dada.

- Analogamente, por ser $\displaystyle\lim_n \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\log n}{n} = 0$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ uma série divergente, o Teorema 23 também nada não permite concluir.

- Mas $\displaystyle\lim_n \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série convergente. Logo, pelo corolário 2, conclui-se que a série proposta é convergente.

B - Critério de D'Alembert (ou da razão)

Este critério é motivado pela simplicidade das séries geométricas, $\displaystyle\sum_n a_n$, com $a_n = r^{n-1}$, que apresentam a propriedade de a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ser constantemente igual a r e que convergem quando e só quando $|r| < 1$. Vamos agora ver que, dada uma série arbitrária de termos positivos, digamos $\displaystyle\sum_n u_n$, ainda que a razão $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ não seja constante, se ela tender para uma constante $r < 1$, então essa série será convergente.

Teorema 24

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos positivos.

(a) Se $\exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \implies \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq r < 1$ então a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \implies \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ então a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

Demonstração

(a) Para $n \geq p$ e para certo $r \in]0,1[$, tem-se sucessivamente

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{r^{n+1}}{r^n} \implies \frac{u_{n+1}}{r^{n+1}} \leq \frac{u_n}{r^n},$$

donde se conclui que a sucessão $\left(\dfrac{u_n}{r^n}\right)_n$ é não crescente a partir da ordem p, sendo, portanto, uma sucessão limitada, com todos os termos em $]0, L]$, onde $L = \max\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$. Então $\dfrac{u_n}{r^n} \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $u_n \leq Lr^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A convergência da série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ segue agora do Teorema 22.

(b) O resultado é óbvio porque, nas condições indicadas, conclui-se que a sucessão $(u_n)_n$, de termos positivos, é crescente, não podendo ter-se $u_n \longrightarrow 0$.

■

Na generalidade dos casos práticos, revela-se muito mais útil a formulação do resultado anterior, Teorema 24, em termos de limite.

Corolário [Critério de D'Alembert (ou da razão)]
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos positivos e suponha-se que existe $\ell = \lim_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

(*a*) Se $\ell < 1$ então a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

1. (*b*)] Se $\ell > 1$ então a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(*c*) Se $\ell = 1$ nada se pode concluir quanto à natureza da série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Demonstração

(*a*) Por hipótese, $\forall \delta > 0,\ \exists p \in \mathbb{N} :\ n > p \Longrightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < \delta$ donde, para $n > p$, se tem $0 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \delta$. Para $\delta = \frac{1}{2}(1-\ell)$, vem que $\exists p \in \mathbb{N} :\ n > p \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ell}{2} < 1$, já que $\delta + \ell = \frac{1}{2} - \frac{\ell}{2} + \ell = \frac{1}{2} + \frac{\ell}{2}$, sendo $\ell < 1$. Pelo teorema 24, parte (a), conclui-se que a série em causa é convergente.

(*b*) Pelo Teorema 10 para sucessões, sobre a permanência do sinal no limite, conclui-se que $\exists q \in \mathbb{N} :\ n > q \Longrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Pelo Teorema 24, parte (b), a série é divergente.

(*c*) Este caso não é conclusivo. Basta pensar na série gerada por $(u_n)_n$ com $u_n = 1/n$, que é divergente, e na série gerada por $(w_n)_n$ com $w_n = 1/n^2$, que é convergente, para as quais se tem $\lim_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1$. ■

Exemplo 20

(*a*) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ é convergente.

De facto,

$$\lim_n \frac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_n \frac{(n+1)^2\,(n!)^2\,(2n)!}{2(n+1)\,(2n+1)\,(2n)!\,(n!)^2} = \lim_n \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1\,.$$

Pelo critério de D'Alembert, a série apresentada é convergente.

(*b*) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$ é divergente.

Como

$$\lim_n \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_n \frac{(n+1)^n\,(n+1)\,n!}{n^n\,(n+1)\,n!} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1,$$

pelo critério de D'Alembert, conclui-se que a série dada é divergente. ■

C - Critério de Cauchy (ou da raíz)

Outro critério de aplicação muito frequente, motivado também pela simplicidade das séries geométricas, é o que apresentamos neste parágrafo, como consequência do seguinte resultado.

Teorema 25
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos.

(a) Se $\exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \implies \sqrt[n]{u_n} \leq r < 1$ então a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ para uma infinidade de valores de n então a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

Demonstração

(a) Para $n \geq p$ e para certo $r \in]0,1]$, tem-se $u_n \leq r^n$. Como $\sum\limits_{n\geq 1} r^n$ é uma série geométrica convergente, pelo Teorema 22, conclui-se que a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) O resultado é óbvio porque, nas condições indicadas, não se pode ter $u_n \longrightarrow 0$. ■

O Teorema 25 levanta algumas dificuldades práticas, por nem sempre ser simples estabelecer uma relação do tipo exigido. A sua formulação em termos de limite conduz a um critério de convergência de aplicação verdadeiramente simples.

Corolário [Critério de Cauchy (ou da raíz)]
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos e suponha-se que existe $\ell = \lim\limits_n \sqrt[n]{u_n}$.

(a) Se $\ell < 1$ então a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) Se $\ell > 1$ então a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Demonstração

(a) Por hipótese, $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \implies |\sqrt[n]{u_n} - \ell| < \delta$, donde, para $n > p$, se tem $0 \leq \sqrt[n]{u_n} < \ell + \delta$. Para $\delta = \frac{1}{2}(1-\ell)$, sai que $\exists p \in \mathbb{N} : n > p \implies 0 \leq \sqrt[n]{u_n} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ell}{2} < 1$, já que $\delta + \ell = \frac{1}{2} - \frac{\ell}{2} + \ell = \frac{1}{2} + \frac{\ell}{2}$ e $\ell < 1$. Pelo Teorema 25, parte (a), conclui-se que a série em causa é convergente.

(b) Pelo Teorema 10 para sucessões, sobre a permanência do sinal no limite, conclui-se que $\exists q \in \mathbb{N}, n > q \implies \sqrt[n]{u_n} > 1$. Pelo Teorema 25, parte (b), a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) Este caso não é conclusivo. Basta pensar na série gerada por $(u_n)_n$ com $u_n = 1/n$, que é divergente, e na série gerada por $(w_n)_n$ com $w_n = 1/n^2$, que é convergente, para as quais se tem $\lim_n \sqrt{u_n} = \lim_n \sqrt{w_n} = 1$. *Cf.* o Exemplo 8, nomeadamente, a conclusão expressa pela fórmula (11). ∎

Observação 10

Na generalidade dos casos práticos, os resultados dos Teoremas 22, 24 e 25 são aplicados com base numa majoração estabelecida a partir de uma certa ordem $p \in \mathbb{N}$. No entanto, tendo em conta o Teorema 21, teria sido indiferente enunciar os referidos resultados exigindo que a majoração fosse verificada para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta á uma opção tomada por vários autores em diversos textos de Cálculo. ∎

Exemplo 21

(a) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^2}{n^3+3n}\right)^n$ é convergente.

Como $\displaystyle\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{n^3+3n}\right)^n} = \lim_n \frac{n^2}{n^3+3n} = 0 < 1$, o critério de Cauchy permite concluir que a série apresentada é convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{n^2}$ é divergente.

Tem-se $\displaystyle\lim_n \sqrt[n]{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} > 1$, pelo que a série proposta é divergente. ∎

2.5 Convergência absoluta e convergência simples. Séries alternadas

Consideremos uma série $\sum_n u_n$ cujos termos têm sinal arbitrário. Formemos a correspondente série dos módulos, $\sum_n |u_n|$, que é obviamente uma série de termos não negativos, para a qual valem todos os resultados apresentados na Subsecção 2.4. Vejamos que a convergência de $\sum_n |u_n|$ acarreta a convergência de $\sum_n u_n$.

Teorema 26

Se a série $\sum_n |u_n|$ é convergente então a série $\sum_n u_n$ também é convergente.

Demonstração

Sejam $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ as sucessões das somas parciais de $\sum_n u_n$ e $\sum_n |u_n|$, respectivamente.

Para $m > n$, tem-se

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| \\ &\leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_m| \\ &= t_m - t_n = |t_m - t_n|. \end{aligned} \tag{42}$$

Sendo $\sum_n |u_n|$ uma série convergente, a sucessão $(t_n)_n$ é de Cauchy. Da condição (42) resulta que também $(s_n)_n$ é de Cauchy e, portanto, a série $\sum_n u_n$ é convergente. ■

Dizemos que uma série $\sum_n u_n$ é *absolutamente convergente* quando a correspondente série dos módulos, $\sum_n |u_n|$, é convergente.

Exemplo 22

(a) Uma série convergente com termos de sinal constante é absolutamente convergente.

(b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ é absolutamente convergente.

De facto, a sua série dos módulos, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, é uma série de Riemann convergente.

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} n}{n^7}$ é absolutamente convergente.

Como $\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^7}\right| \leq \frac{1}{n^7}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^7}$ é uma série de Riemann convergente, pelo Teorema 22 conclui-se que a série dos módulos da série dada é convergente.

(d) A série harmónica alternada, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, não é absolutamente convergente.

A correspondente série dos módulos é a série harmónica, $\sum_n \frac{1}{n}$, que é divergente. ■

Observação 11
Se uma série é absolutamente convergente então ela é convergente. Dito de outra forma, uma série não pode ser divergente se a sua série dos módulos for convergente. ■

Quando uma série é convergente mas não é absolutamente convergente, dizemos que ela é *simplesmente convergente*.

Séries alternadas
Entre as séries com termos de sinal variável, destacam-se aquelas cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Estas séries apresentam a forma geral

$$\sum_n (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

ou (43)

$$\sum_n (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - +a_3 + a_4 - a_5 + \cdots$$

onde $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e designam-se por *séries alternadas*.

Quanto à natureza de uma série alternada, pode acontecer que $\sum_n (-1)^{n+1}\, a_n$ seja absolutamente convergente, quando a corespondente série dos módulos é convergente, seja simplesmente convergente, quando a série dos módulos é divergente mas a série alternada converge, ou seja divergente.

Um resultado muito útil para estudar séries alternadas, sobretudo quando a correspondente série dos módulos é divergente, é o seguinte.

Teorema 27 [Critério de Leibniz (condição suficiente de convergência das séries alternadas)]
Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente e tal que $\lim_n a_n = 0$. Então a série $\sum_n (-1)^{n+1}\, a_n$ é convergente.

Demonstração
Seja $(s_n)_n$ a sucessão das somas parciais da série $\sum_n (-1)^{n+1}\, a_n$,

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vejamos que $(s_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy. A ideia é a seguinte (Figura 2): os termos da sucessão $(s_n)_n$ avançam e recuam, mas a diferença entre eles é cada vez menor. Isto sugere que se mostre, de facto, que $(s_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy.

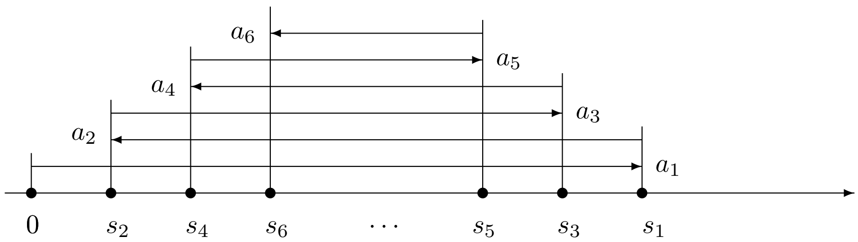

Figura 2: Comportamento da sucessão das somas paraciais da série alternada do Teorema 27
.

De facto, atendendo a que $(a_n)_n$ é decrescente e de termos positivos, temos

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots > 0$$

Então

$$\begin{aligned}
0 \leq |s_{n+1} - s_n| &= |(-1)^{n+2} a_{n+1}| = a_{n+1} \leq a_n \\
0 \leq |s_{n+2} - s_n| &= |(-1)^{n+3} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+1}| = a_{n+1} - a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n \\
0 \leq |s_{n+3} - s_n| &= |(-1)^{n+4} a_{n+3} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+1}| \\
&= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) \leq a_{n+1} \leq a_n \\
\cdots \qquad \cdots & \qquad \cdots
\end{aligned}$$

e, mais em geral, para qualquer $m > n$,

$$0 \leq |s_m - s_n| \ = \ a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots + (-1)^{m-n+1} a_m \leq a_{n+1} \leq a_n$$

donde, resumindo,

$$0 \leq |s_m - s_n| \leq a_n \,, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \,, \;\; \text{com} \;\; m > n. \tag{44}$$

Por outro lado, $\lim\limits_n a_n = 0$, pelo que

$$\forall \delta > 0 \,, \; \exists p \in \mathbb{N} \;: \;\; n > p \Longrightarrow a_n < \delta. \tag{45}$$

Conjugando os resultados (44) e (45), vem que

$$\forall \delta > 0 \,, \; \exists p \in \mathbb{N} : \;\; m > n > p \Longrightarrow |s_m - s_n| < \delta,$$

que significa que $(s_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy, logo convergente. Consequentemente, a série $\sum\limits_n (-1)^{n+1} a_n$ é convergente. ■

Observação 12

O resultado enunciado no Teorema 27 continua válido quando a sucessão $(a_n)_n$ é decrescente apenas a partir de uma certa ordem $p \in \mathbb{N}$. Basta atender ao Teorema 21 e à correspondente Observação 8.

Exemplo 23

(a) A série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ do Exemplo 22(d) é simplesmente convergente.

A conclusão é imediata usando, depois do que se viu no Exemplo 22(d), o Teorema 27.

(b) A série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ é simplesmente convergente.

Semelhante ao exemplo anterior.

(c) A série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \dfrac{\sqrt{n}}{n+5}$ é simplesmente convergente.

A série dos módulos é divergente, tal como se conclui do Teorema 23, comparando-a com a série harmónica. Ponha-se $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tem-se $\lim\limits_n a_n = 0$ e, além disso, é fácil verificar que $(a_n)_n$ é decrescente para $n \geq 5$, já que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+6} \, \frac{n+5}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \, \frac{n+5}{n+6}$$

e, portanto,

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \frac{(n+1)(n+5)^2}{n(n+6)^2} = \frac{n^3 + 11n^2 + 35n + 25}{n^3 + 12n^2 + 36n} < 1, \quad \text{para todo } n \geq 5.$$

Logo, a série dada é simplesmente convergente.

(d) A série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos(n\pi)}{\log^{\,n}(n\pi)}$ converge absolutamente.

Atendendo a que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e estudando a série dos módulos, $\sum\limits_n \dfrac{1}{\log^{\,n}(n\pi)}$, através do critério de Cauchy, Corolário do teorema 25, sai que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{\log^n(n\pi)}} = \lim_n \frac{1}{\log(n\pi)} = 0 < 1$$

pelo que a série dos módulos é convergente. ■

Observação 13

O resultado do Teorema 27 é uma condição suficiente de convergência, pelo que nada se poderá concluir quando falha alguma das hipóteses. Saliente-se, no entanto, que quando $a_n \not\longrightarrow 0$, a série alternada é divergente, já que também $(-1)^{n+1}a_n \not\longrightarrow 0$ (Corolário 1 do Teorema 20). Os casos mais complexos são aqueles em que $a_n \longrightarrow 0$ mas não é decrescente. *Cf.* o Exemplo 24.

Exemplo 24

(a) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\frac{n+5}{n}$ é divergente.

Basta atender a que não existe $\displaystyle\lim_n (-1)^{n+1}\frac{n+5}{n}$ e usar o Corolário 1 do Teorema 20.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}a_n$, com $a_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{se } n \text{ par} \\ 1/n^3 & \text{se } n \text{ ímpar,} \end{cases}$ converge absolutamente.

Basta atender a que a série dos módulos é convergente, uma vez que $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ é uma série de Riemann convergente. A conclusão segue do primeiro critério de comparação, Teorema 22. Repare-se que o critério de Leibnitz não é aplicável à série proposta, uma vez que a sucessão $(a_n)_n$ não é decrescente a partir de ordem alguma.

(c) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}b_n$, com $b_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{se } n \text{ par} \\ 1/n & \text{se } n \text{ ímpar,} \end{cases}$ é divergente.

• Em primeiro lugar, vejamos que a série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$, é divergente.

De facto, podemos escrever

$$\sum_{n\geq 1} b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n)^2}\right)$$

e como $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}$ é uma série divergente (comparar com a série harmónica através do segundo critério de comparação, Teorema 23) e $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2}$ é uma série convergente, a conclusão segue da Consequência 3 apresentada na Subsecção 2.1.

• O critério de Leibnitz, Teorema 27, não é aplicável à série alternada porque a sucessão $(b_n)_n$ não é decresente a partir de ordem alguma.

- No entanto, atendendo a que

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}b_n = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^2}\right),$$

conclui-se, novamente pela Consequêncuia 3, que a série alternada é divergente. ■

2.6 Comutatividade de séries

A comutatividade da adição com um número finito de parcelas não é preservada, como veremos a seguir, quando passamos a considerar um número infinto de parcelas. Veremos, em particular, que podemos perder a convergência de uma série se tomarmos as suas parcelas por uma ordem diferente da inicial.

Exemplo 25
Consideremos a série harmónica alternada, que sabemos ser simplesmente convergente (Exemplo 23(a)). Seja S a soma desta série. Então

$$S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{46}$$

e também (Consequência 1(b), Subsecção 2.1)

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n} \tag{47}$$

pelo que, acrescentando parcelas nulas na série de (47), vem ainda (Consequência 1(a), Subsecção 2.1)

$$\frac{S}{2} = 0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}-\cdots=\sum_{n\geq 1}\left(0+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\right). \tag{48}$$

Adicionando ordenadamente as séries das expressões (46) e (48), resulta

$$\frac{3S}{2} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\frac{1}{17}+\cdots \tag{49}$$

que representa uma série com os mesmos termos da série harmónica alternada da expressão (46), tomados desta vez por outra ordem, com soma diferente da inicial. ■

O Exemplo 25 mostra que uma reordenação nos termos de uma série simplesmente convergente pode conduzir a uma série com soma diferente da inicial. O Teorema 28, que apresentaremos a seguir, estabelece que uma reordenação nos termos de uma série simplesmente convergente pode conduzir também a uma série divergente. Por outro lado, o Teorema 29 garante que uma reordenação nos termos de uma série absolutamente convergente não modifica a natureza nem a soma da série. Antes de apresentarmos estes teoremas, vamos introduzir algumas notações relativas a uma dada série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Notações

• Uma reordenação dos termos de $\sum_{n\geq 1} u_n$ é determinada por uma bijecção $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, pelo que a nova série obtida da reordenação representa-se por $\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)}$.

• Com os termos positivos de $(u_n)_n$ formemos a série $\sum_{n\geq 1} p_n$, dita a *parte positiva* da série, e com os termos negativos formemos a série $\sum_{n\geq 1} q_n$, dita a *parte negativa*, da seguinte forma

$$p_n = \begin{cases} u_n & \text{se } u_n > 0 \\ 0 & \text{se } u_n \leq 0, \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} -u_n & \text{se } u_n < 0 \\ 0 & \text{se } u_n \geq 0. \end{cases}$$

Tem-se, evidentemente, $p_n \geq 0$ e $q_n \geq 0$. Além disso, é fácil reconhecer que

$$u_n = p_n - q_n \,, \quad |u_n| = p_n + q_n \,. \tag{50}$$

Note-se, agora, que:

(a) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é abolutamente convergente então convergem $\sum_{n\geq 1} p_n$ e $\sum_{n\geq 1} q_n$;

de facto, da convergência de $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ e da segunda igualdade em (50) sai a convergência de $\sum_{n\geq 1} p_n$ e de $\sum_{n\geq 1} q_n$, uma vez que $p_n \leq |u_n|$ e que $q_n \leq |u_n|$ (Teorema 22);

(b) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é simplesmente convergente então divergem $\sum_{n\geq 1} p_n$ e $\sum_{n\geq 1} q_n$;

de facto, convergindo uma das séries, por exemplo $\sum_{n\geq 1} p_n$, da primeira igualdade em (50) sairia a convergência da outra, já que $q_n = p_n - u_n$ (Consequência 1(a), Subsecção 2.1) e da segunda igualdade em (50) sairia a convergência de $\sum_{n\geq 1} |u_n|$, o que é absurdo, uma vez que a convergência de $\sum_{n\geq 1} u_n$ é simples.

Estamos agora em condições de apresentar os teoremas.

Teorema 28 [Riemann]

Seja $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série simplesmente convergente. Então:

(a) fixado arbitrariamente um número real $s \in \mathbb{R}$, existe uma bijecção $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que a correspondente série $\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)}$ converge e tem soma s;

(b) existem bijecções $\psi, \varphi, \varrho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tais que as séries $\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)}$, $\sum_{n\geq 1} u_{\varphi(n)}$ e $\sum_{n\geq 1} u_{\varrho(n)}$ divergem, com as correspondentes sucessões das somas parciais a tenderem para $+\infty$, para $-\infty$ e a oscilar, respectivamente.

Demonstração:
Apresentamos apenas um esboço da demonstração (*cf.* a bibliografia recomendada para uma demonstração completa). Consideremos então uma série $\sum_{n\geq 1} u_n$, simplesmente convergente. Tem-se que $\lim_n u_n = 0$ e que $\sum_n p_n$ e $\sum_n q_n$ são divergentes, com (*cf.* (b) imediatamente atrás)

$$\lim_n (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = +\infty\,, \qquad \lim_n (-q_1 - q_2 - \cdots - q_n) = -\infty. \tag{51}$$

(a) Fixemos um número real positivo s, qualquer. Reordenemos os termos da série dada procedendo da seguinte forma:

• começamos por somar os primeiros termos de $(p_n)_n$ até à menor ordem, digamos k_1, para a qual se tem, pela primeira vez,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > s,$$

o que é possível pela primeira condição de (51);

• em seguida, somamos os termos de $(-q_n)_n$ até à menor ordem, digamos k_2, para a qual se tem, pela primeira vez,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{k_2} < s,$$

o que é possível pela segunda condição de (51);

• somamos novamente os termos de $(p_n)_n$, desde a ordem k_1+1 até à menor ordem k_3, para a qual se tem, pela segunda vez,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_3} > s.$$

Prolongando este raciocínio, obtém-se a reordenação procurada. Para a série assim obtida, a sucessão $(s_n)_n$ das somas parciais oscila em torno de s, com oscilações de amplitude cada vez menor, convergindo para s. De facto, atendendo a que, ao somarmos um termo positivo, p_{k_ℓ}, que provoca uma oscilação, temos

$$s_{k_\ell} - s \leq p_{k_\ell}\,,$$

e que ao somarmos um termo negativo, $-q_{k_j}$, que provoca uma oscilação, temos

$$s - s_{k_\ell} \leq q_{k_j}\,,$$

vem que, de cada vez que se causa uma oscilação, seja ela com um termo positivo ou negativo de $(u_n)_n$, temos

$$|s_{k_\ell} - s| \leq |u_{k_\ell}|\,.$$

Como $u_n \longrightarrow 0$, conclui-se que $s_n \longrightarrow s$.

(b) Somamos primeiro termos positivos até à ordem k_1 para a qual se tem, pela primeira vez,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > 1.$$

De seguida, somamos apenas o primeiro termo negativo, $-q_1$. Agora, somamos novamente termos positivos até à ordem k_2 até obter, pela primeira vez,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} > 2.$$

Somamos apenas o segundo termo negativo, $-q_2$, e outra vez termos positivos até obter

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 + p_{k_2+1} + \cdots + p_{k_3} > 3.$$

E assim sucessivamente. Como $q_n \longrightarrow 0$, conclui-se que a sucessão das somas parciais da série resultante desta reordenação tenderá para $+\infty$.

De maneira semelhante, podemos reordenar os termos da série de modo a que a correspondente sucessão das somas parciais tenda para $-\infty$. Para obter uma série cuja sucessão das somas parciais oscile em torno de dois números reais, o raciocínio é semelhante. ■

Teorema 29 [Dirichlet]
Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série absolutamente convergente de soma s e $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijecção.
Então a série $\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)}$ tamém é absolutamente convergente e a sua soma é igual a s.

Demonstração:
Sejam $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ as sucessões associadas às séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)}$. Tem-se $\lim_n s_n = s$.

(i) Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dada uma permutação $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, seja $m = \max\{\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(n)\}$. Então

$$t_n = u_{\psi(1)} + u_{\psi(2)} + \cdots + u_{\psi(n)} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_m \leq s,$$

pelo que $(t_n)_n$ é uma sucessão majorada, logo convergente, pelo que vimos em (40). Então a série $\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)}$ é convergente e a sua soma será $t \leq s$. Por outro lado, também a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ pode ser vista como uma permutação de $\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)}$ e sendo a última uma série convergente, conclui-se que $s \leq t$. Consequentemente, as duas séries convergem e possuem a mesma soma.

(ii) No caso geral, se $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$ forem as partes positiva e negativa de $(u_n)_n$ então, dada uma bijecção $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, as partes positiva e negativa de $(u_{\psi(n)})_n$ serão $(p_{\psi(n)})_n$ e $(q_{\psi(n)})_n$. Se $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ converge, então também convergem $\sum_{n\geq 1} p_n$ e $\sum_{n\geq 1} q_n$ (*cf.* o resultado de (a) antes do teorema 28) e, pelo que vimos em (i), convergem também $\sum_{n\geq 1} p_{\psi(n)}$ e $\sum_{n\geq 1} q_{\psi(n)}$, tendo-se

$$\sum_{n\geq 1} p_{\psi(n)} = \sum_{n\geq 1} p_n \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} q_{\psi(n)} = \sum_{n\geq 1} q_n.$$

Como $|u_{\psi(n)}| = p_{\psi(n)} + q_{\psi(n)}$, conclui-se que $\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)}$ é absolutamente convergente, sendo

$$\sum_{n\geq 1} u_{\psi(n)} = \sum_{n\geq 1} p_{\psi(n)} - \sum_{n\geq 1} q_{\psi(n)} = \sum_{n\geq 1} p_n - \sum_{n\geq 1} q_n = \sum_{n\geq 1} u_n.$$

■