Capítulo III

Funções: limite e continuidade

Neste capítulo vamos estudar funções reais de varivel real, dando particular atenção às noções de *limite* e de *continuidade*, bem como aos resultados envolvendo estes conceitos.

1 Noções elementares

Genericamente, representamos uma função real de domínio D por $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. O *contra-domínio* de uma tal função é o conjunto constituído por todas as imagens de f,

$$f(D)=\{\, f(x):\ x\in D\,\}\,. \tag{1}$$

Igualdade de funções

Duas funções $f\colon D_1\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g\colon D_2\longrightarrow\mathbb{R}$ dizem-se *iguais* quando

$$D_1=D_2=D \quad\wedge\quad f(x)=g(x),\ \ \forall x\in D. \tag{2}$$

Exemplo 1

(a) As funções $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}^-$, e $g(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}^+$, não são iguais.

De facto, embora seja $f(x)=g(x)=-x$, as funções têm domínios diferentes.

(b) Já as funções $h(x)=|x|\ \ x\in\mathbb{R}^-$, e $j(x)=\sqrt{x^2},\ x\in\mathbb{R}^-$, são iguais.

Repare-se que, para $x\in\mathbb{R}^-$, vem $h(x)=j(x)=-x>0$. ■

Vocabulário variado

Uma função $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ diz-se:

(a) *majorada* quando

$$\exists M\in\mathbb{R}:\ \forall x\in D,\ f(x)\le M, \tag{3a}$$

ou seja, quando

$$\exists M\in\mathbb{R}:\ \forall x\in D,\ f(x)\in\,]-\infty,M]; \tag{3b}$$

(b) *minorada* quando
$$\exists m \in \mathbb{R}: \ \forall x \in D, \ f(x) \geq m, \tag{4a}$$
ou seja, quando
$$\exists m \in \mathbb{R}: \ \forall x \in D, \ f(x) \in [m, +\infty[\,; \tag{4b}$$

(c) *limitada* quando é majorada e minorada, ou seja quando
$$\exists\, m, M \in \mathbb{R}: \ \forall x \in D, \ f(x) \in [m, M], \tag{5a}$$
ou equivalentemente, quando
$$\exists M \in \mathbb{R}: \ \forall x \in D, \ |\, f(x) \,| \leq M; \tag{5b}$$

(d) *crescente* quando
$$\forall x, y \in D, \ \ x < y \implies f(x) \leq f(y); \tag{6a}$$
em particular, *estritamente crescente* se
$$\forall x, y \in D, \ \ x < y \implies f(x) < f(y); \tag{6b}$$

(e) *decrescente* quando
$$\forall x, y \in D, \ \ x < y \implies f(x) \geq f(y); \tag{7a}$$
em particular, *estritamente decrescente* se
$$\forall x, y \in D, \ \ x < y \implies f(x) > f(y); \tag{7b}$$

(f) *monótona* se é crescente ou decrescente; em particular, *estritamente monótona* se é *estritamente crescente* ou *estritamente decrescente*;

(g) *enquadrada* pelas funções g e h, tais que $D(g) = D(h) = D$, quando
$$\forall x \in D, \ \ g(x) \leq f(x) \leq h(x); \tag{8}$$

(h) *par* quando
$$\forall x \in D, \quad -x \in D \quad \wedge \quad f(-x) = f(x); \tag{9}$$

(i) *ímpar* quando
$$\forall x \in D, \quad -x \in D \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x); \tag{10}$$

(j) *periódica* de período T quando
$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \quad \wedge \quad f(x+T) = f(x); \tag{11}$$

(k) *injectiva* quando a objectos distintos em D correspondem imagens distintas em $\mathbb{R}$, ou seja, quando

$$\forall x, y \in D, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y), \tag{12a}$$

ou ainda, quando

$$\forall x, y \in D, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y; \tag{12b}$$

(l) *sobrejectiva* quando o seu contra-domínio coincide com o conjunto de chegada, ou seja, quando

$$\forall y \in \mathbb{R}\,, \ \exists x \in D: \ \ f(x) = y; \tag{13}$$

(m) *bijectiva* quando é, simultaneamente, injectiva e sobrejectiva.

Exemplo 2

(a) A função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é par, não é periódica, não é injectiva porque $f(-x) = f(x)$, nem é sobrejectiva porque $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ e, portanto, dado $y < 0$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Além disso, f é minorada mas não é majorada. Não é monótona, embora seja estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.

(b) Sobre a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \operatorname{sen} x$, podemos dizer que é ímpar, periódica de período 2π, não é injectiva porque $g(x) = g(x + 2\pi)$, nem é sobrejectiva porque $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Podemos ainda dizer que g é limitada e que não é monótona, embora seja estritamente crescente, por exemplo, em $[0, \pi/2]$ e estritamente decrescente, por exemplo, em $[\pi/2, \pi]$.

(c) Consideremos agora a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x + 1$. Trata-se de uma função que não é par, não é ímpar, nem é periódica. É injectiva porque $h(x) = h(y) \Rightarrow 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow x = y$. Também é sobrejectiva porque $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De facto, dado arbitrariamente $y \in \mathbb{R}$, basta tomar $x = (y-1)/2$ para ter $h(x) = y$. Logo, h é bijectiva. Podemos ainda dizer que h não é majorada nem minorada, e que é estritamente crescente. ■

Restrição e extensão

Sejam $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e A, S dois conjuntos tais que $A \subset D \subset S$. Chama-se *restrição* de f ao conjunto A à função (única)

$$f|_A : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad (f|_A)(x) = f(x), \ \ \forall x \in A, \tag{14}$$

e *extensão* de f a S a qualquer função

$$f^*\colon S \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f^*(x) = f(x); \ \forall x \in D. \tag{15}$$

Exemplo 3

(a) Consideram-se frequentemente as restrições do *seno* e do *coseno*, ambas de domínio $\mathbb{R}$, aos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente.

(c) A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pode ser estendida à origem pondo, por exemplo,

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Claro que f admite uma infinidade de extensões a todo $\mathbb{R}$, diferentes de f^*, basta modificar o valor atribuído na origem. ■

Imagem e imagem recíproca

Consideremos uma função $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e dois conjuntos $A \subset D$ e $B \subset \mathbb{R}$. Chama-se *imagem de A por f* ao conjunto

$$f(A) = \{ f(x) : \ x \in A \} \tag{16}$$

e *imagem recíproca* de B por f ao conjunto

$$f^{-1}(B) \ = \ \{ x \in D : \ \ f(x) \in B \} \, . \tag{17}$$

Exemplo 4

Consideremos a função $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f(\,]-1, 1[\,) = [0, 1[\,, \quad f(\,[-4, 2]\,) = [0, 16]\,, \quad f(\,]1, 3]\,) = \,]1, 9]$$

$$f^{-1}(\,\{1\}\,) = \{-1, 1\}\,, \quad f^{-1}(\,]-2, -1[\,) = \emptyset, \quad f^{-1}(\,]-2, 1]\,) = f^{-1}(\,[0, 1]\,) = [-1, 1].$$ ■

Composição de funções

Dadas $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(D) \subset B$, define-se a *função composta*

$$g \circ f\colon \ D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))\,, \ \ \forall x \in D. \tag{18}$$

Exercício Considerar as funções

$$\begin{array}{llll} f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, & f(x) = x^2 & g\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}\,, & g(x) = \sqrt{x} \\ k\colon \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}\,, & k(x) = x^2 & h\colon \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}\,, & h(x) = \sqrt{-x} \\ u\colon \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}\,, & u(x) = -x^2 & v\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}\,, & v(x) = -\sqrt{x}\,. \end{array}$$

(a) Determinar o contra-domínio de cada uma delas.

(b) Verificar que não é possível definir cada uma das funções

$$k \circ g\,, \ \ h \circ f\,, \ \ g \circ u\,, \ \ u \circ g\,, \ \ u \circ h\,, \ \ k \circ h\,, \ \ h \circ k\,, \ \ v \circ u\,.$$

(c) Definir as compostas

$$f \circ g\,,\ \ f \circ v\,,\ \ f \circ h\,,\ \ g \circ k\,,\ \ h \circ u\,,\ \ k \circ v\,,\ \ v \circ k\,,\ \ u \circ v\,,\ \ v \circ f\,,\ \ g \circ f.$$

(d) Verificar que as funções $f \circ g$, $f \circ v$ e $k \circ v$ são iguais entre si mas diferentes da função $v \circ k$.

(e) Verificar que as funções $g \circ k$, $f \circ h$ e $h \circ u$ são iguais entre si mas diferentes da função $u \circ v$. ■

Inversa de uma função
Dadas as funções $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(D) \subset B$ e $g(B) \subset D$, dizemos que g é *inversa* de f quando $g \circ f = \mathrm{id}_D$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$, isto é, quando

$$(g \circ f)(x) = x\,,\ \ \forall x \in D \quad \wedge \quad (f \circ g)(x) = x\,,\ \ \forall x \in B. \tag{19}$$

Exercício Considerar as funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\,,\ \ x > 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1+x}{x}\,,\ \ x > 0\,.$$

(a) Determinar o contra-domínio de f e o contra-domínio de g.

(b) Verificar que f e g são inversas uma da outra.

(c) Justificar que as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ não são iguais. ■

Máximos e mínimos
Dizemos que uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui um:

(a) *máximo local* em $a \in D$ se

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall x \in\,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\,,\ \ f(x) \leq f(a); \tag{20}$$

(b) *máximo absoluto* em $a \in D$ se

$$\forall x \in D\,,\ \ f(x) \leq f(a) \tag{21}$$

(c) *mínimo local* em $a \in D$ se

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\,,\ \ f(x) \geq f(a); \tag{22}$$

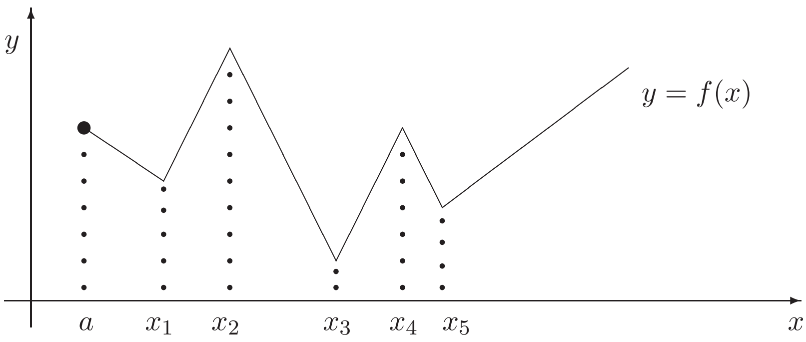
(d) *mínimo absoluto* em $a \in D$ se

$$\forall x \in D\,,\ \ f(x) \geq f(a). \tag{23}$$

Um ponto onde a função f atinge um extremo diz-se um *ponto extremante* de f, podendo tratar-se de um *maximizante* ou de um *minimizante*.

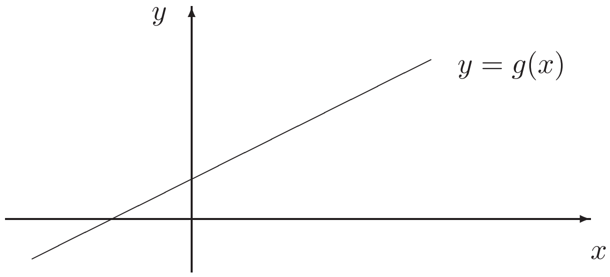
Exemplo 5

(a) Consideremos a função f definida em $D = [a, +\infty]$, cuja representação gráfica é



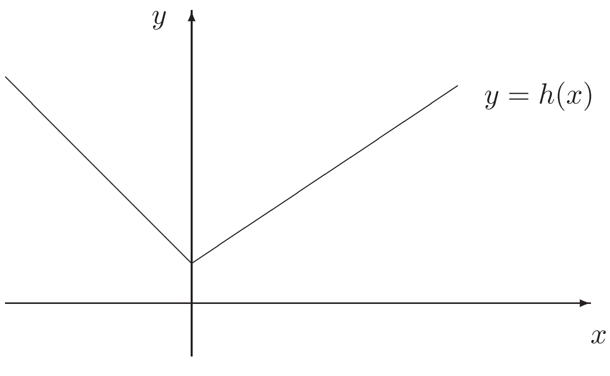
A função f possui máximos locais em a, x_2 e x_4, que são $f(a)$, $f(x_2)$ e $f(x_4)$, respectivamente. Não possui máximo absoluto. Possui mínimos locais em x_1, x_3 e x_5, que são $f(x_1)$, $f(x_3)$ e $f(x_5)$, respectivamente, e um mínimo absoluto em x_3.

(b) Consideremos agora a função g definida em $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica é



A função g não possui extremos locais (nem absolutos).

(c) Seja agora a função h definida em $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica é



A função h não possui máximos locais (nem absolutos) mas possui um mínimo absoluto na origem, que é $h(0)$. ■

Exercício

1. Considere as funções

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,\cos x\,, \quad x \in [0, 5\pi],\\ g(x) &= \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,, \quad x \in [-\pi, 4\pi],\\ h(x) &= 1 + \mid x - 2 \mid, \quad x \in [-3, 12]. \end{aligned}$$

Indique, se existirem, os extremos locais e absolutos de f, g e h.

2. Considere a função $\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$. Esboce o gráfico da função definida por:

(a) $g(x) = f(x) + 2,\ x \in \mathbb{R};$

(b) $h(x) = f(x+2),\ x \in \mathbb{R};$

(c) $i(x) = 2f(x),\ x \in \mathbb{R};$

(d) $j(x) = f(2x),\ x \in \mathbb{R};$

(e) $k(x) = \max\{f(x), 2\},\ x \in \mathbb{R};$

(f) $\ell(x) = \min\{f(x), 1\},\ x \in \mathbb{R}.$

Analise, graficamente, a paridade e a existência de extremos (locais e absolutos) de cada função. Para cada uma das funções, defina uma restrição bijectiva e caracterize a correspondente inversa. ■

2 Limite de uma função

Nesta secção vamos estudar a noção mais importante do cálculo – o limite de uma função. No Capítulo II, no contexto das sucessões de números reais, estudámos a forma mais simples do limite tratava-se de uma função de domínio $\mathbb{N}$ e o limite era analisado para $n \to +\infty$. Vamos agora estender esta noção, considerando uma função de domínio $D \subset \mathbb{R}$, mais genérico, e falando do limite quando x tende para certo $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.

2.1 Ideia intuitiva de limite

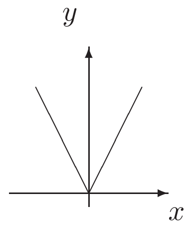
Dada uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, vamos interessar-nos por *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, que indicamos por

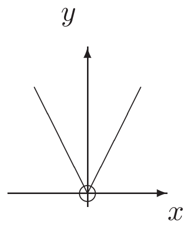
$$\lim_{x \to a} f(x), \tag{24}$$

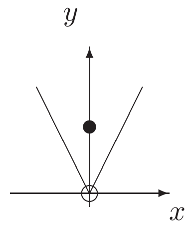
ou seja, pelos valores que f assume em pontos x próximos de a e ver se, à medida que x se aproxima de a sem nunca o atingir, tais valores se aproximam, tanto quanto se queira, de algum número $\ell \in \mathbb{R}$. Repare-se que, tal ponto a pode pertencer ou não ao domínio de f; se pertencer, o valor $f(a)$ que a função assume em a não interfere na existência nem no valor do limite. Tudo depende exclusivamente daquilo que se passa em pontos $x \neq a$ nas vizinhanças de a. É assim necessário que f esteja definida em tais pontos x à volta de a, ou seja, que o ponto a possua, nas suas vizinhanças, pontos x do domínio de f. Dito de outra forma, é necessário que a seja um *ponto de acumulação* de D, $a \in D'$.

Exemplo 6 [Análise intuitiva]
Analisemos, intuitivamente, a existência de limite na origem para as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h: \quad \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & 3x \\ x = 0 & \longmapsto & 2 \end{array}$$







Para todas elas, 0 é ponto de acumulação do respectivo domínio. Quando, em particular, analisamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, em nada interfere o valor $f(0)$ ou $h(0)$. Apenas nos interessa o que se passa com f, com g e com h, enquanto $x \to 0$ mas sempre $x \neq 0$. Observamos que cada uma das funções se aproxima de 0, tanto quanto se queira, desde que se tome x suficientemente próximo de 0, sempre com $x \neq 0$, pelo que somos levados a conjecturar que seja (*cf.* o Exemplo 7 para a prova)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0. \tag{25}$$

■

2.2 Definição de limite

Seja f: $D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de domínio D e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que o número real ℓ é o *limite* de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell, \tag{26}$$

se for possível tornar os valores $f(x)$ arbitrariamente próximos de ℓ, desde que o genérico x se torne suficientemente próximo de a, percorrendo apenas pontos do domínio D mas sem nunca atingir o ponto a. Simbolicamente,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \tag{27}$$
$$\text{se e só se} \quad \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \; (x \in D \;\wedge\; 0 < |x-a| < \varepsilon\,) \Longrightarrow \; |f(x) - \ell\,| < \delta.$$

Exemplo 7
Consideremos as funções do Exemplo 6. Vejamos que, de acordo com a definição (27), se tem $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$. Seja então $\delta > 0$. Para $x \neq 0$, tem-se $|h(x) - 0| = |3x| = 3|x - 0|$, pelo que, tomando $\varepsilon = \delta/3$, resulta $|h(x) - 0| < \delta$ sempre que $|x - 0| < \varepsilon$.

Analogamente, mostra-se que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, uma vez que as três funções coincidem para $x \neq 0$. ■

Exemplo 8

Seja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Mostremos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$. Como

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| = |x - 2||x - 2 + 4| \leq |x - 2| \left(|x - 2| + 4\right)$$

ter-se-á $|f(x) - 4| < \varepsilon(\varepsilon + 4) = \varepsilon^2 + 4\varepsilon$, sempre que $|x - 2| < \varepsilon$. Consequentemente, dado $\delta > 0$, arbitrário, basta tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon^2 + 4\varepsilon = \delta$, ou seja, $\varepsilon = -2 + \sqrt{4 + \delta}$, para que se cumpra a condição (27) com $a = 2$ e $\ell = 4$. ■

2.3 Propriedades do limite

Usando a definição (27) de limite, estabelem-se alguns resultados fundamentais, entre os quais destacamos as seguintes.

Teorema 1 [Unicidade do limite]

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_2$ então $\ell_1 = \ell_2$.

Demonstração

Seja $\delta > 0$, arbitrário. Por um lado, por ser $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$, da definição (27), sai que

$$\exists\alpha > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \alpha\,) \Longrightarrow \ |f(x) - \ell_1\,| < \frac{\delta}{2}\,. \tag{28a}$$

Por outro lado, por ser $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_2$, sai que

$$\exists\beta > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \beta\,) \Longrightarrow \ |f(x) - \ell_1\,| < \frac{\delta}{2}\,. \tag{28b}$$

Seja $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$. Para $y \in D$ e $0 < |y - a| < \varepsilon$, valem simultaneamente as condições (28a-b). Logo,

$$|\ell_1 - \ell_2\,| \ = \ |\ell_1 - f(y) + f(y) - \ell_2| \ \leq \ |f(y) - \ell_1\,| + |f(y) - \ell_2\,| < \ \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

donde

$$|\,\ell_1 - \ell_2\,| < \delta\,, \quad \forall\delta > 0$$

e, consequentemente, $\ell_1 - \ell_2 = 0$, ou seja, $\ell_1 = \ell_2$. ■

Teorema 2 [Mantém-se o limite para restrições]

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$ e $A \subset D$ com $a \in A'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ então também $\lim\limits_{x\to a} f|_A(x) = \ell$.

A demonstração é imediata. ■

Teorema 3

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$ e A, B subconjuntos de D tais que $a \in A' \cap B'$.

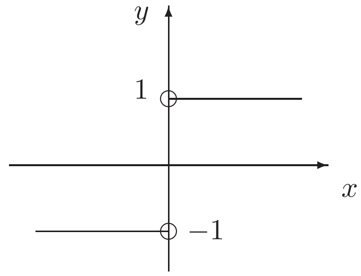
Se $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \ell_1$ e $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x) = \ell_2$, com $\ell_1 \neq \ell_2$, então não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Demonstração

Basta conjugar os Teoremas 1 e 2. ■

Exemplo 9

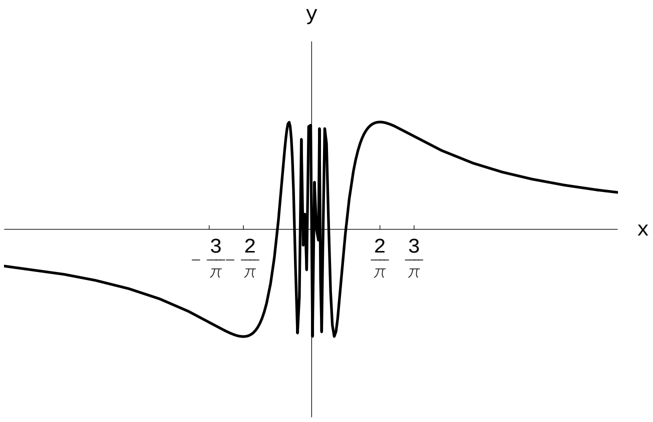
(a) Seja $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$.



Não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, porque (Teorema 3)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

(b) Seja $h(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.



Não existe $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. De facto, considerando

$$A = \left\{x\in\mathbb{R} : x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \ , \ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \text{e} \quad B = \left\{y\in\mathbb{R} : y = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \ , \ n \in \mathbb{N}\right\},$$

tem-se

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ , \ n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{y} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \ , \ n \in \mathbb{N},$$

donde

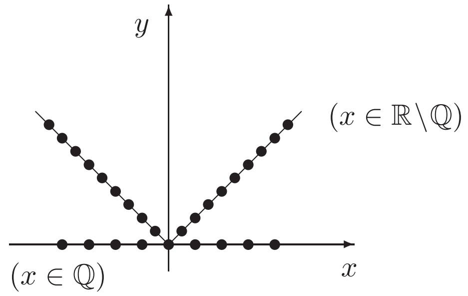
$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e, portanto, o limite em causa não existe, uma vez que (Teorema 3)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in A}} h(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in B}} h(x) = -1.$$

(c) Seja $j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ |x| & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$



Tem-se $\lim\limits_{x\to 0} j(x)$, porque

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in Q}} j(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \qquad \wedge \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}\backslash Q}} j(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

■

Exemplo 10

(a) Vejamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{se e só se} \quad \lim_{x\to a} |f(x)| = 0. \tag{29}$$

Da definição (27), tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \iff & \forall\delta>0, \exists\varepsilon>0: \ (x\in D \ \wedge \ 0<|x-a|<\varepsilon) \Longrightarrow |\,|f(x)|-0\,|<\delta \\ \iff & \forall\delta>0, \exists\varepsilon>0: \ (x\in D \ \wedge \ 0<|x-a|<\varepsilon) \Longrightarrow |f(x)\,|<\delta \\ \iff & \forall\delta>0, \exists\varepsilon>0: \ (x\in D \ \wedge \ 0<|x-a|<\varepsilon) \Longrightarrow |\,f(x)-0\,|<\delta \\ \iff & \lim_{x\to a} f(x) = 0 \end{aligned}$$

(b) Seja $\ell \neq 0$. Vejamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ \not\Longleftrightarrow \ \lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell\,|. \tag{30}$$

• Basta atender a que a implicação recíproca é falsa.

Considere-se, por exemplo, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $a = 0$.

Tem-se $|f(x)|=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, donde $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$. No entanto, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, já que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1.$$

• Porém, convém notar que, em (30), a implicação directa é verdadeira.

De facto, atendendo à Propriedade 5 (j) sobre o valor absoluto, Capítulo I, tem-se

$$|\,|f(x)|-|\ell|\,| \ \leq \ |f(x)-\ell| \tag{31}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff & \forall\delta>0, \exists\varepsilon>0: \ (x\in D \ \wedge \ 0<|x-a|<\varepsilon) \Longrightarrow |f(x)-\ell\,|<\delta \\ \overset{(31)}{\Longrightarrow} & \forall\delta>0, \exists\varepsilon>0: \ (x\in D \ \wedge \ 0<|x-a|<\varepsilon) \Longrightarrow |\,|f(x)|-|\ell|\,|<\delta \\ \iff & \lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell\,| \end{aligned}$$

■

Teorema 4 [Limitação de funções com limite]
Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $a\in D'$. Se existir $\ell\in\mathbb{R}$ tal que $\ell=\lim_{x\to a} f(x)$ então a função f é limitada numa vizinhança do ponto a, isto é,

$$\exists M>0\,,\ \ \exists\varepsilon>0:\ \ (x\in D\,,\ \ 0<|x-a|<\varepsilon\,)\Longrightarrow\ |f(x)|\leq M. \tag{32}$$

Demonstração
Como $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$, da definição (27) considerando, em particular, $\delta=1$, sai que

$$\exists\varepsilon>0:\ \ (x\in D\,,\ \ 0<|x-a|<\varepsilon\,)\Longrightarrow |f(x)-\ell\,|<1,$$

donde, atendendo à condição (31) , vem também

$$\begin{aligned}\exists\varepsilon>0:\ \ (x\in D\,,\ \ 0<|x-a|<\varepsilon\,)\ &\Longrightarrow\ \ |\,|f(x)\,|-|\ell\,|\,|<1\\ &\Longrightarrow\ \ -1<|\,f(x)\,|-|\ell\,|<1\\ &\Longrightarrow\ \ |\,f(x)\,|<|\ell\,|+1.\end{aligned} \tag{33}$$

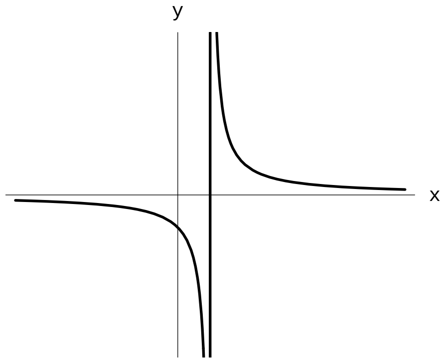
Basta então tomar $M=|\ell\,|+1$ para garantir que se verifique a condição (32). ∎

Corolário
Seja $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função que se torna ilimitada em qualquer vizinhança de certo ponto $a\in D'$. Então não existe $\ell\in\mathbb{R}$ tal que $\ell=\lim_{x\to a} f(x)$. ∎

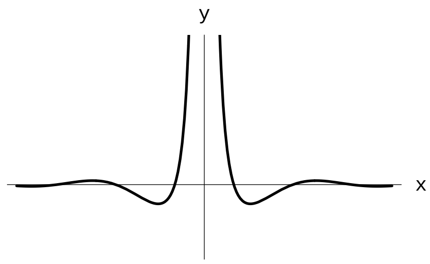
Exemplo 11

(a) Não existe $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$.
A função $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$, torna-se ilimitada em qualquer vizinhança do ponto 1.

(b) Analogamente, também não existe $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x^2}$.
A função $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, torna-se ilimitada em qualquer vizinhança do ponto 0.



Exemplo 11a: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x\neq 1$.



Exemplo 11b: $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$, $x\neq 0$.

Teorema 5

Sejam $f, g\colon D\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a\in D'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada em $D\setminus\{a\}$ então[1]

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0. \tag{34}$$

Demonstração
Como g é limitada em $D \setminus \{a\}$, existe $L > 0$ tal que

$$|g(x)| \;\leq\; L\,, \;\forall x \in D \setminus \{a\}.$$

Dado $\delta > 0$, arbitrário, também $\delta/L > 0$. Por ser $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, resulta que

$$\exists \varepsilon > 0 : \;(x \in D \;\wedge\; |x-a| < \varepsilon) \implies |f(x)| \;<\; \frac{\delta}{L}.$$

Consequentemente, para este ε, conclui-se que

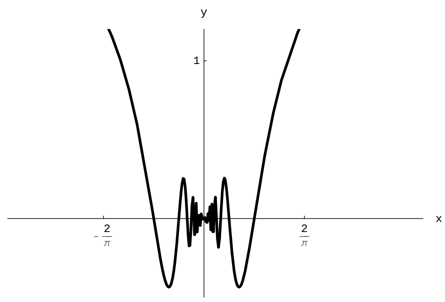
$$(\, x \in D \;\wedge\; |x-a| \;<\varepsilon\,) \implies |f(x)\, g(x)| < L\,\frac{\delta}{L} = \delta,$$

o que prova a condição (34). ■

Exemplo 12

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0.$

Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, Exemplo 9(b), mas a conclusão é justificada pelo Teorema 5, uma vez que $-1 \leq \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.



(b) Sejam $f(x) = 3x$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0, \\ 5\,\dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$

Não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, porque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} 5 = 5$ e $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-5) = -5$.

Mas g é limitada, já que $|g(x)| \leq 5$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Pelo Teorema 5, sai que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

(c) Sejam $f(x) = 3x$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

Não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Mas como g é limitada, pelo Teorema 5, sai que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

■

[1] Repare-se que a conclusão do Teorema 5 é válida ainda que não exista $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Teorema 6 [Aritmética dos limites]

1. (a) Se k é uma constante e $a\in\mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x\to a} k = k$.

   (b) Se $a\in\mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

2. Sejam $f, g\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $a\in D'$. Suponhamos que existem $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $m = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Então:

   (a) $\lim\limits_{x\to a}\,(f+g)\,(x) = \ell + m$; (b) $\lim\limits_{x\to a}\,(f-g)\,(x) = \ell - m$;

   (c) $\lim\limits_{x\to a}\,(f\cdot g)\,(x) = \ell\cdot m$; (d) $\lim\limits_{x\to a}\,\dfrac{f}{g}\,(x) = \dfrac{\ell}{m}$, sempre que $m\neq 0$.

Demonstração
Os resultados 1.(a) e (b) são consequências imediatas da definição (27). Os resultados 2.(a)-(d) podem ser demonstrados seguindo um raciocínio análogo ao utilizado no Capítulo II para demonstrar o Teorema 9, que estabelece um resultado equivalente no contexto das sucessões (*cf.* a bibliografia recomendada, nomeadamente, a referência [4]). ■

Exemplo 13

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{sen} x \,+\, x^2\cdot\dfrac{1}{e^x}\,+\,7\right) = 0 + 0\cdot\dfrac{1}{1} + 7 = 0$

(b) Para calcular $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\dfrac{1}{x}$, o Teorema 6 não é aplicável, por não existir $\lim\limits_{x\to 0}\,\cos\dfrac{1}{x}$. Mas recorrendo ao Teorema 5, é imediato que $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\dfrac{1}{x} = 0$.

■

Teorema 7 [Enquadramento]
Sejam $f, g, h\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $a\in D'$ tais que

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x)\,,\quad \forall x\in D\backslash\{a\}. \tag{35}$$

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ então também $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Demonstração
Seja $\delta > 0$, arbitrário. Então:

$$\begin{aligned}\exists\alpha>0:\ (\,x\in D\ \wedge\ |x-a|\ <\alpha\,) \ &\Longrightarrow\ |f(x)-\ell\,|\ <\ \delta\\ &\Longrightarrow\ -\delta+\ell<f(x)<\ell+\delta;\end{aligned} \tag{36a}$$

$$\begin{aligned}\exists\beta>0:\ (\,x\in D\ \wedge\ |x-a|\ <\beta\,) \ &\Longrightarrow\ |h(x)-\ell\,|\ <\ \delta\\ &\Longrightarrow\ -\delta+\ell<h(x)<\ell+\delta.\end{aligned} \tag{36b}$$

Seja $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$. Para $x \in D$ e $|x-a| < \varepsilon$, valem simultaneamente as condições (36a-b). Logo, atendendo também ao enquadramento (35), resulta que

$$\begin{aligned}(\, x \in D \ \wedge\ |x-a| < \varepsilon\,) \quad &\Longrightarrow \quad -\delta + \ell < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \delta \\ &\Longrightarrow \quad |\, g(x) - \ell\, | < \delta\end{aligned}$$

que garante que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$. ■

Exemplo 14

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0.$

Tem-se $-1 \leq \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq 1\,,\ x \neq 0\,,$ pelo que $-x^4 \leq x^4 \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq x^4\,,\ x \neq 0\,.$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^4\right) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^4$, o Teorema 7 garante que o limite proposto vale 0.

O Teorema 5 teria permitido obter a mesma conclusão.

(b) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}_0^+\,, \\ x^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}^-\,, \\ |x| & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,. \end{cases}$ Então $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0\,.$

Para estudar o limite quando $x \to 0$, é suficiente considerar $x \in\,]-1,1[\,$, tendo-se

$$x^3 \leq f(x) \leq |x|\,, \quad \forall x \in\,]-1,1[\,.$$

Como

$$\lim_{x\to 0} x^3 = \lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

o Teorema 7 garante que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0\,.$ ■

Teorema 8 [Permanência de sinal]
Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a\in D'$ tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ com $\ell > 0$. Então

$$\exists \varepsilon > 0\colon (x \in D \ \wedge\ 0 < |x-a| < \varepsilon) \implies f(x) > 0. \tag{37}$$

Demonstração
Seja $\delta = \ell/2 > 0$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $x \in D$,

$$0 < |x-a| < \varepsilon \Longrightarrow |\, f(x) - \ell\, | < \frac{\ell}{2} \Longrightarrow \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2} \implies f(x) > 0.$$ ■

Corolario 1
Sejam $f, g\colon D\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a\in D'$.

(a) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$, com $\ell > m$, então

$$\exists \varepsilon > 0 :\ (x \in D \ \wedge\ 0 < |x-a| < \varepsilon) \implies f(x) > g(x). \tag{38}$$

(b) Se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x\in D\backslash\{a\}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ então $\ell \leq m$.

Demonstração

(a) Basta aplicar o Teorema 8 à função $h(x) = f(x) - h(x)$, $x \in D$.

(b) Se fosse $\ell > m$, pelo resultado da parte (a), concluir-se-ia da existência de $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \varepsilon) \implies f(x) > g(x),$$

o que contraria a hipótese. Logo tem que ser $\ell \leq m$. ■

Exercícios

1. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}$.

2. Calcular, caso existam, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + |x|}{2x}$ e $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + |x|}{2}$.

3. Verificar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$.

4. Sejam $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = \begin{cases} 2006 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 2007 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

   Calcular, justificando devidamente, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)g(x)$.

5. Calcular $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} t)}{\operatorname{sen} t}$.

6. Sejam $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$

   (a) Determinar o domínio das funções definidas por $\dfrac{f(x)}{g(x)}, \dfrac{g(x)}{f(x)}, \dfrac{f(x)}{h(x)}, \dfrac{h(x)}{f(x)}$.

   (b) Verificar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ e que $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{2}$.

   (c) Justificar que não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ nem $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

   (d) Verificar que $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{1}{2}$ e que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 1$.

   (e) Justificar que não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x)}{f(x)}$ e que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x)}{f(x)} = 1$.

7. Seja $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\left| \dfrac{f(x)}{x} \right| \leq 2007$, $\forall x \neq 0$. Será que existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

   Justificar devidamente. ■

2.4 Limites laterais

No estudo de limites é útil introduzir a noção de limite lateral. Na prática, em virtude do Teorema 2, ela intervém muitas vezes para mostrar que certos limites não existem. É o que se passa, por exemplo, com a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

para a qual se tem

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = 1.$$

Estes limites representam precisamente os limites das restrições de f correspondentes a $x < 0$ e a $x > 0$. Noutras situações, pode até existir o limite "completo", digamos $\lim_{x\to a} f(x)$, mas ser conveniente considerar separadamente $\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$ e $\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$, o que é possível desde que a seja ponto de acumulação, de ambos os lados, do domínio de f. Estão em causa os chamados *limites laterais*, que passamos agora a definir.

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'_+ \cap D'_-$. Dizemos que o número real ℓ é o *limite lateral à direita* de $f(x)$ quando x tende para a (por valores superiores a a) quando for possível tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de ℓ, desde que o genérico x se torne suficientemente próximo de a, percorrendo apenas pontos do domínio D à direita de a e sem nunca atingir o ponto a. Simbolicamente, escrevemos

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell && (39a) \\ &\qquad \text{se e só se} \quad \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < x - a < \varepsilon) \implies |f(x) - \ell\,| < \delta. \end{aligned}$$

Analogamente, para o *limite lateral à esquerda* de $f(x)$ quando x tende para a (por valores inferiores a a). Escrevemos

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell && (39b) \\ &\qquad \text{se e só se} \quad \forall \delta > 0\,, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ -\varepsilon < x - a < 0) \implies |f(x) - \ell\,| < \delta \end{aligned}$$

A existência de um limite "completo" pode ser decidida com base nos limites laterais, através do seguinte resultado.

Teorema 9

Tem-se $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ se e só se existem e são iguais a ℓ os correspondentes limites laterais, isto é,

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) \iff \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \ \wedge \ \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \right). \tag{40}$$

Demonstração

(i) Suponhamos que existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$.

Então (Teorem 2) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$, uma vez que se trata de limites, no mesmo ponto a, da restrição de f a $D \cap \,]-\infty, a[$ e da restrição de f a $D \cap \,]a, +\infty[$, respectivamente.

(ii) Reciprocamente, seja $\delta > 0$, arbitrário.

Por um lado, como $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$, tem-se que

$$\exists \alpha > 0 : \quad (\, x \in D \,\wedge\, -\alpha < x - a < 0 \,) \implies |\, f(x) - \ell \,| < \delta$$

Por outro lado, como $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$,

$$\exists \beta > 0 : \quad (\, x \in D \,\wedge\, 0 < x - a < \beta \,) \implies |\, f(x) - \ell \,| < \delta$$

Consequentemente, para $\varepsilon = min\{\alpha, \beta\}$, resulta que

$$(\, x \in D \,\wedge\, 0 < |x - a| < \varepsilon \,) \implies |\, f(x) - \ell \,| < \delta$$

pelo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. ∎

Observação 1

Para os limites laterais valem, com as devidas adaptações, os resultados apresentados na Subsecção 2.3 sobre o limite "completo". ∎

Exemplo 15

(a) Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

De facto, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \quad$ e $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$.

(b) Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

Repare-se que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} = 1$ porque $1/x$ torna-se ilimitada por valores negativos, levando a exponencial $e^{1/x}$ a tender para 0. Por outro lado, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} = 0$, porque $1/x$ torna-se ilimitada por valores positivos, levando também a exponencial $e^{1/x}$ a tornar-se ilimitada por valores positivos. ∎

Exercícios

Estude a existência dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}, \quad \lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x+7}{|x+7|}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^{-1/(x-1)}, \quad \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/x^4}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, para $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x > 0, \\ 50 & \text{se } x = 0, \\ x^5 + 1 & \text{se } x < 0; \end{cases}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, para $g(x) = \begin{cases} e^{\operatorname{sen} x} & \text{se } x > 0, \\ 50 & \text{se } x = 0, \\ \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$

∎

2.5 Limites no infinito

Vamos agora dar significado à expressão $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ quando D é ilimitado inferiormente, e à expressão $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ quando D é ilimitado superiormente. Dizemos que o número real ℓ é o limite de $f(x)$ quando x tende para $-\infty$, e escrevemos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de ℓ, desde que, em $D\cap]-\infty,a[$, o genérico x se torne suficientemente grande em valor absoluto. Simbolicamente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \tag{41}$$
$$\text{se e só se} \quad \forall\delta>0\,,\ \exists A>0 : (x\in D \wedge x<-A) \Longrightarrow |f(x)-\ell\,| < \delta.$$

De maneira análoga definimos o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \tag{42}$$
$$\text{se e só se} \quad \forall\delta>0\,,\ \exists A>0 : (x\in D \wedge x>A) \Longrightarrow |f(x)-\ell\,| < \delta.$$

Observação 2

Para os limites no infinito valem, com as devidas adaptações, os resultados apresentados na Subsecção 2.3 sobre o limite para x a tender para certo $a\in\mathbb{R}$. ■

Exemplo 16

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}$.

De facto, $x\to\pm\infty \Longrightarrow 1/x\to 0 \Longrightarrow e^{1/x}\to 1$.

(b) Não existe $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$ nem $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$.

Sejam $A=\{x\in\mathbb{R} : x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ e $B=\{x\in\mathbb{R} : x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, ambos ilimitados inferior e superiormente. Tem-se

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x\in A}} \cos x = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in A}} \cos x = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x\to-\infty\\ x\in B}} \cos x = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in B}} \cos x = -1,$$

pelo que não pode existir nenhum dos limites em causa.

(c) Em $\mathbb{R}$, também não existe $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$ nem existe $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$

Basta atender a que x^2 se torna ilimitado quando $x\to-\infty$ ou quando $x\to+\infty$. ■

Exercício

Determinar, caso existam:

1. (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$;

2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} \operatorname{sen} x$; (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} \operatorname{sen} x$;

3. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} x$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x+\operatorname{sen} x}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\cos x}{x^2-\operatorname{sen} x}$; (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-\operatorname{sen}^2 x}{5e^x+\cos x}$.

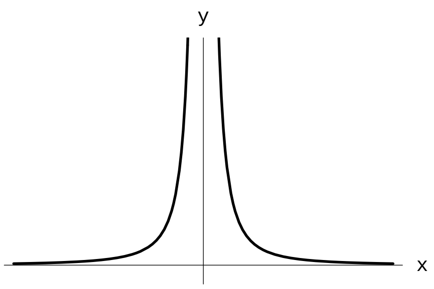
■

2.6 Limites infinitos

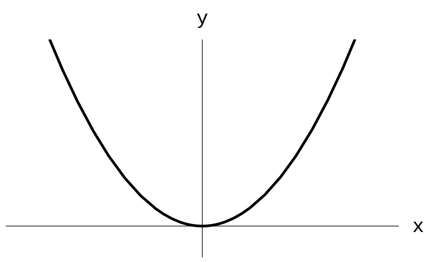
Suponhamos que pretendemos averiguar a existência de $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ e de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, onde

$$h(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \qquad g(x) = x^2, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Como h se torna ilimitada quando $x \to 0$ e g se torna ilimitada quando $x \to +\infty$, os limites em causa não existem (*cf.* o Coroláriio do Teorema 4).



$h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$g(x) = x^2$, $x\in\mathbb{R}$

No entanto, estas funções tornam-se ilimitadas com um comportamento monótono, levando-nos a afirmar que $h(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para 0 e que $g(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$. Adoptando a notação utilizada anteriormente para o limite, escrevemos

$$\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,.$$

Tratemos os casos gerais. Sejam $f : D\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a\in D'$. Dizemos que $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para a se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente grande desde que x se torne suficientemente próximo de a, percorrendo apenas pontos de D, mas sem nunca atingir a. Escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \tag{43a}$$
$$\text{se e só se} \quad \forall A>0,\ \exists\varepsilon>0 : \ (x\in D \ \wedge\ 0<|x-a|<\varepsilon) \implies f(x)>A.$$

Analogamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \tag{43b}$$
se e só se $\quad \forall A > 0,\, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \implies f(x) < -A;$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \tag{43c}$$
se e só se $\quad \forall A > 0,\, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < x - a < \varepsilon) \implies f(x) > A;$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \tag{43d}$$
se e só se $\quad \forall A > 0\,,\, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < x - a < \varepsilon) \implies f(x) < -A;$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \tag{43e}$$
se e só se $\quad \forall A > 0,\, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge -\varepsilon < x - a < 0) \implies f(x) > A;$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \tag{43f}$$
se e só se $\quad \forall A > 0,\, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge -\varepsilon < x - a < 0) \implies f(x) < -A;$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \tag{43g}$$
se e só se $\quad \forall A > 0,\, \exists B > 0 : (x \in D \wedge x > B) \implies f(x) > A;$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \tag{43h}$$
se e só se $\quad \forall A > 0,\, \exists B > 0 : (x \in D \wedge x > B) \implies f(x) < -A;$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \tag{43i}$$
se e só se $\quad \forall A > 0,\, \exists B > 0 : (x \in D \wedge x < -B) \implies f(x) > A;$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \tag{43j}$$
se e só se $\quad \forall A > 0,\, \exists B > 0 : (x \in D \wedge x < -B) \implies f(x) < -A.$

Muito brevemente, vejamos algumas propriedades dos limites infinitos.

Unicidade

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ então não pode ser $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ nem pode existir $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Não limitação

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ então f é ilimitada em qualquer vizinhança do ponto a.

Permanência

Se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$, e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

Aritmética

(a) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e g é minorada então $\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x) + g(x)\Big) = +\infty$.

(b) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $g(x) > k > 0$, $\forall x \in D$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = +\infty$.

(c) Se $f(x) > 0$, $\forall x \in D$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ se e só se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

(d) Se $f(x) > k > 0$, $\forall x \in D$, $g(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(e) Se $g(x)$ não tem sinal determinado, pode não existir $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(f) Se f é limitada, com $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. ■

São válidos resultados análogos para $-\infty$ em vez de $+\infty$ e para a^+ ou a^- em vez de a.

Exercícios

(a) Calcular, caso existam (comece por fazer um gráfico das funções em causa):

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \operatorname{sen} x)$; (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(e^{x^2} \operatorname{sen} x + 2e^{x^2}\Big)$;

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x |\operatorname{sen} x + \cos x|$; (iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \Big(|\cos x| + |\operatorname{sen} x|\Big)$.

(b) Dizer se existe, finito ou infinito, $\lim\limits_{x\to 0} \Big(f(x) + g(x)\Big)$, para

$$f(x) = \frac{1}{|x|}\,,\ x \neq 0, \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(c) Em cada alínea, esboçar o gráfico de uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições indicadas:

(i) $f(1) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$;

(ii) $f(1) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$;

(iii) $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, nem finito nem infinito;

(iv) $\nexists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, finitos ou infinitos, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(d) Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{10^{2007}}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Diga se existem, finitos ou infinitos, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. ■

3 Continuidade

Vamos agora tratar a noção de continuidade que, como sabemos, está extremamente relacionada com o conceito de limite. Faremos primeiro uma abordagem sobre a continuidade pontual, isto é sobre a continuidade do ponto de vista *local*, e passaremos depois a um tratamento *global*, onde nos interessaremos pelas propriedades das funções contínuas em intervalos.

3.1 Definições e primeiros exemplos

Seja $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e $a\in D$ um ponto do seu domínio. Dizemos que f é *contínua em* a quando

$$a \text{ é ponto isolado de } D \qquad \text{ou} \qquad a\in D' \text{ e } \lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{44a}$$

Simbolicamente, traduzimos a continuidade de f em a escrevendo que

$$\forall\delta>0,\ \exists\varepsilon>0:\ (x\in D\ \wedge\ |x-a|<\varepsilon)\implies |f(x)-f(a)|<\delta, \tag{44b}$$

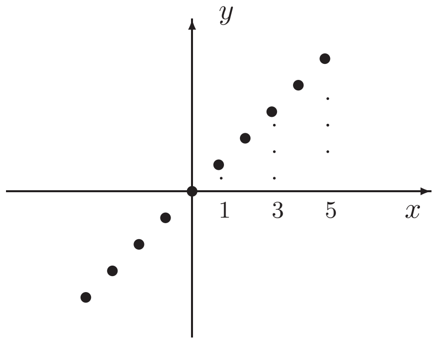
com o significado de que os valores de $f(x)$ se aproximam *arbitrariamente* de $f(a)$, desde que o genérico x se aproxime *suficientemente* de a, percorrendo apenas pontos de D, não necessariamente distintos de a. Dizemos ainda que:

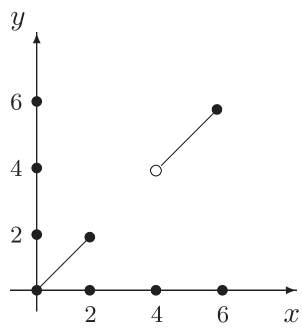
- f é *contínua* em A, com $A\subset D$, quando f é contínua em todo o ponto $a\in A$;
- f é *contínua* quando f é contínua em todo o domínio D.

Exemplo 17

(a) As funções f e g definidas a seguir são contínuas.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g:[0,2]\cup\,]4,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$





(b) Toda a função polinomial, $p\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida como segue, é contínua

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\ ,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{45}$$

Em particular, toda a função constante é contínua.

(c) As funções seno, cosseno, tangente e cotangente são contínuas.

(d) As funções e^x, $x \in \mathbb{R}$, e $\log x$, $x \in \mathbb{R}^+$, são contínuas.

(e) A função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(f) A função definida por $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ não é contínua em ponto algum.

(g) A função definida por $k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua, apenas, em $a = 0$.

■

3.2 Descontinuidades

Da definição (44*a*-*b*) de continuidade, uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma *descontinuidade* no ponto $a \in D$ quando se verificar uma das duas condições seguintes:

- $a \in D'$ e não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$; (46*a*)
- $a \in D'$, existe $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ mas $\ell \neq f(a)$. (46*b*)

Dizemos, em particular, que f possui uma *descontinuidade removível*, quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \ell \neq f(a), \tag{47a}$$

caso em que, modificando o valor da função no ponto a, seria possível remover a descontinuidade, e que possui uma *descontinuidade de salto*, quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_2 \quad \wedge \quad \ell_1 \neq \ell_2. \tag{47b}$$

Simbolicamente, traduzimos uma descontinuidade de f num ponto $a \in D$, negando a afirmação (44*b*), ou seja, escrevendo

$$\exists \delta > 0 : \ \forall \varepsilon > 0\,, \ \exists x_\varepsilon \in D, \ |x_\varepsilon - a| < \epsilon \ \wedge \ |f(x_\varepsilon) - f(a)| \geq \delta. \tag{48}$$

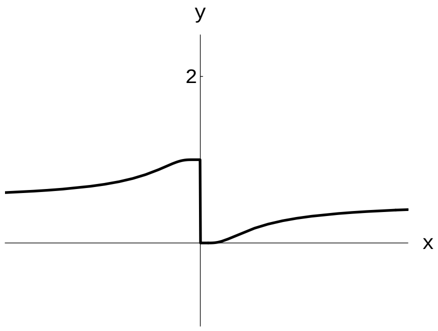
Observação 3
Como consequência da definição (44*a*), uma função não pode possuir descontinuidades em pontos isolados do seu domínio. *Cf.* o Exemplo 17 (a), função f. ■

Exemplo 18
As funções apresentadas a seguir possuem uma descontinuidade na origem. Trata-se de uma descontinuidade removível no caso das funções f e ℓ e de uma descontinuidade de salto no caso das funções h e j. Para a função g, não existe o limite na origem porque a função tende para $+\infty$; para a função k, não existe nenhum dos limites laterais na origem (Exemplo 9 (b)).

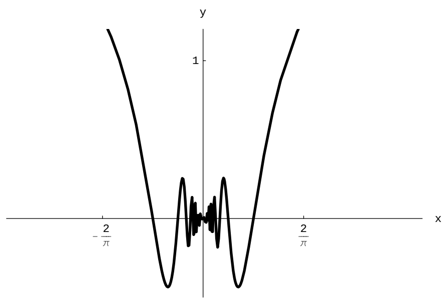
(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (d) $j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(e) $k(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (f) $\ell(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



Exemplo 18 (d), função j



Exemplo 18 (f), função ℓ

3.3 Continuidade lateral

A continuidade lateral é uma noção que assume algum interesse quando estão em causa pontos de acumulação do domínio da função, já que no caso de pontos isolados, a função é trivialmente contínua, pela própria definição. Assim, dizemos que uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é

- *contínua à direita* no ponto $a \in D \cap D'$ quando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; (49$a$)
- *contínua à esquerda* no ponto $a \in D \cap D'$ quando $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. (49$b$)

Observação 4
É óbvio que uma função f é contínua em $a \in D \cap D'$ se e só se f é contínua à direita e à esquerda no ponto a. ■

Exemplo 19
A função j do Exemplo 18 (d) é contínua (apenas) à direita na origem. A função k do Exemplo 18 (e) não é contínua à esquerda nem à direita na origem porque não existe $\lim\limits_{x \to 0^-} k(x)$ nem existe $\lim\limits_{x \to 0^+} k(x)$. ■

3.4 Propriedades sobre a continuidade pontual

A partir da definição (44*a*-*b*) e dos resultados apresentados na Secção 2 sobre o limite de funções, extraem-se os seguintes resultados.

Teorema 10 [Continuidade de restrições]
Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in D$. Então qualquer restrição de f a um subconjunto do domínio que contenha a é também contínua em a.

A demonstração é imediata. ■

Teorema 11 [Limitação de funções contínuas]
Se $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em a então f é limitada em alguma vizinhança de a, i.e.

$$\exists \varepsilon > 0\,, \;\; \exists M > 0 : \;\; |f(x)| \leq M\,, \;\; \forall x \in D \cap \left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[\,. \tag{50}$$

Demonstração
(i) Se a é ponto isolado de D então (a não é ponto de acumulação de D)

$$\exists \varepsilon > 0 : \; \left]\, a-\varepsilon, a+\varepsilon \,\right[\cap D = \{a\}$$

e a é o único ponto de D no intervalo $]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[$. Para este ε, basta tomar $M = |f(a)|$ para garantir que se verifique a condição (50).

(ii) Se a é ponto de acumulação de D então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ e, pelo Teorema 4 sobre o limite de funções, f é limitada numa vizinhança de a. ■

Observação 5
Do Teorema 11, sai que se uma função f se torna ilimitada em qualquer vizinhança de certo ponto a então f não pode ser contínua em a. É o caso da função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] k & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

onde k é uma constante arbitrária. Independentemente do valor de k, f não é contínua na origem, pelo facto se se tornar ilimitada em qualquer vizinhança de $a = 0$. ■

Teorema 12 [Permanência do sinal das funções contínuas]
Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $a \in D$ tal que $f(a) > 0$. Então existe um intervalo $J = \left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[$ tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in J \cap D$.

Demonstração
(i) Se a é ponto isolado de D então $\exists \varepsilon > 0 : \;]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[\cap D = \{a\}$ e a é o único ponto de D no intervalo $]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[$. Basta então considerar $J = \,]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[$.

(ii) Se a é ponto de acumulação de D então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ e, pelo Teorema 8 sobre a permanência do sinal no limite, nomeadamente pelo Corolário 1, existe um intervalo aberto centrado em a, digamos J, tal que f é positiva em $J \cap D$. ■

Observação 6

Um resultado análogo ao do Teorema 12 é igualmente válido quando $f(a) < 0$. ■

Teorema 13 [Aritmética de funções contínuas]

Sejam $f, g\colon D\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a\in D$. Então as funções $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ são contínuas em a e a função $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Demonstração

(i) Se a é ponto isolado de D, o resultado é imediato.

(ii) Se a é ponto de acumulação de D, basta usar o Teorema 6 sobre a aritmética dos limites. ■

Observação 7

Do Teorema 13 sai, em particular, que se f é contínua em a, então também são contínuas em a as funções kf, com k uma constante real, e ainda $\dfrac{1}{f}$, desde que $f(a) \neq 0$.

■

Teorema 14 [Continuidade da função composta]

Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon B\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(D)\subset B$. Se f é contínua em $a \in D$ e g é contínua em $f(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a.

Demonstração

Ponha-se $b = f(a)$. Seja $\delta > 0$, arbitrário. Como g é contínua em $b\in B$,

$$\exists\alpha > 0 : (\, y \in B \,\wedge\, |y - b| < \alpha) \Longrightarrow |g(y) - g(b)| < \delta. \tag{51}$$

Como f é contínua em $a \in D$, para este α,

$$\exists\varepsilon > 0 : (x \in D \,\wedge\, |x - a| < \epsilon\,) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \alpha. \tag{52}$$

Consequentemente, para este ε, encadeando as condições (51) e (52), resulta

$$\begin{aligned}(x \in D \,\wedge\, |x - a| < \varepsilon\,) &\Longrightarrow (f(x) \in B \,\wedge\, |f(x) - b| < \alpha)\\ &\Longrightarrow |g(f(x)) - g(b)| < \delta\\ &\Longrightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \delta.\end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é contínua no ponto a. ■

Observação 8

O Teorema 14 estabelece que a composta de duas funções contínuas é uma função contínua. No entanto, ainda que f ou g não sejam contínuas, pode acontecer que a composta seja contínua. Consideremos, por exemplo, as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 3 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

que não são contínuas em ponto algum de $\mathbb{R}$. No entanto,

$$f\,(g(x)) = -1\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g\,(f(x)) = 2\,,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

pelo que $f \circ g$ e $g \circ f$ são contínuas em $\mathbb{R}$. ■

Exercício
Defina funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nas condições indicadas e explique porque não há qualquer contradição com o Teorema 14:

(a) f contínua, g não contínua, $g \circ f$ contínua;

(b) f não contínua, g contínua, $g \circ f$ contínua. ■

3.5 Resultados sobre funções contínuas

As funções contínuas em conjuntos "especiais" possuem propriedades fortes, que passamos agora a apresentar.

Teorema 15 [Teorema de Cantor]
Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se D é fechado e limitado então $f(D)$ é fechado e limitado.

Demonstração: Omitida. *Cf.*, por exemplo, a referência bibliográfica [4]. ■

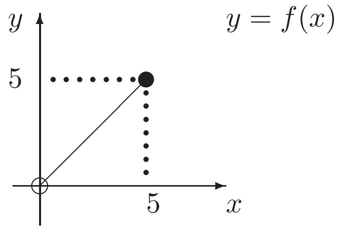
Exemplo 20
A função $f(x) = 1$, $\forall x \in [0, 4]$, é contínua. Tem-se $D = [0, 4]$ e $f(D) = \{1\}$.
A função $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,2] \\ 2 & \text{se } x \in [4,6] \end{cases}$ é contínua em $D = [0,2] \cup [4,6]$. Tem-se $f(D) = [0,2]$. ■

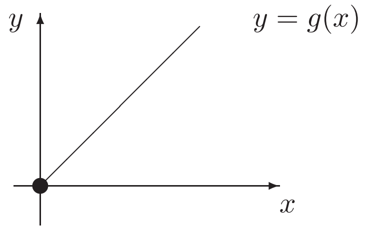
Teorema 16 [Teorema de Weierstrass]
Se $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e D é fechado e limitado então f é limitada e atinge os seus extremos em D, isto é,

$$\exists\, a, b \in D : \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)\,, \quad \forall x \in D. \tag{53}$$

Demonstração
Pelo Teorema 15, $f(D)$ é fechado e limitado. Por $f(D)$ ser limitado, existem $m = \inf f(D)$ e $M = \sup f(D)$, com $m \leq M$, pelo que $f(D) \subset [m, M]$. Mas $m \in \overline{f(D)}$ pois, caso contrário, existiria $\varepsilon > 0$ tal que $]m - \epsilon, m + \epsilon[\cap f(D) = \emptyset$, e concluir-se-ia que $f(D) \subset [m + \epsilon, M]$, pelo que $m + \varepsilon$ seria um minorante de $f(D)$ maior do que m, contrariando o facto de m ser o ínfimo de $f(D)$. Analogamente também $M \in \overline{f(D)}$. Como $f(D)$ é fechado, tem-se $\overline{f(D)} = f(D)$, pelo que $m, M \in f(D)$, resultando então $m = \min f(D)$ e $M = \max f(D)$. Consequentemente $\exists\, a, b \in D : \ f(a) = m \ \wedge \ f(b) = M$, completando-se a demonstração. ■

Observação 9
É fundamental que D seja fechado. Consideremos a função $f(x) = x$, $x \in]0, 5]$, que não atinge mínimo. Isto acontece porque $]0, 5]$ não é fechado. Também é fundamental que D seja limitado. Consideremos a função $g(x) = x$, $x \in [0, +\infty[$, que não atinge máximo. Isto acontece porque $[0, +\infty[$ não é limitado.



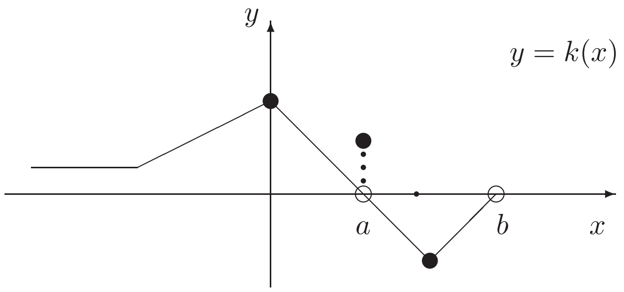


Claro que o domínio pode não ser limitado ou não ser fechado, ou a função pode não ser contínua mas, ainda assim, os extremos serem atingidos.

• $h(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma função contínua num domínio fechado mas não limitado; ainda assim, os dois extremos são atingidos.

• $j(x) = |x|$, $x \in]-3, 4]$ é uma função contínua num domínio limitado que não é fechado; mesmo assim, os dois extremos são atingidos.

• $k(x)$, $x \in]-\infty, b[$, representada na figura ao lado, não é contínua e o seu domínio não é fechado nem limitado; apesar de tudo isso, k atinge os dois extremos.



■

Teorema 17 [Teorema do valor intermédio (Bolzano-Cauchy)]
Seja $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \neq (b)$. Se k é um número real estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = k$.

Demonstração
Suponhamos que $f(a)<k<f(b)$. Consideremos o conjunto $S = \{a \le x \le b : f(x) \le k\}$. Temos $S \neq \emptyset$, já que $a \in S$, e S limitado porque $S \subset [a,b]$. Então, em particular, S possui supremo, digamos M, pelo que $S \subset [a, M]$. Como $S \subset [a,b]$, tem-se $a \le M \le b$. Vejamos que $f(M) = k$. De facto, se fosse $f(M) > k$, então $M > a$ e da continuidade de f existiria um intervalo $I =]M-\varepsilon, M[$ tal que $f(x) > k$, $\forall x \in I$. Logo $S \subset [a, M-\varepsilon[$ e $M-\varepsilon$ seria um majorante de S inferior a M, contrariando o facto de M ser o supremo de S. Portanto, não pode ser $f(M) > k$. Por outro lado, se fosse $f(M) < k$, então $M < b$ e novamente da continuidade de f, existiria um intervalo $J =]M, M+\alpha[$ tal que $f(x) < k$, $\forall x \in J$. Consequentemente, $J \subset S$ e M não seria um majorante de S. Assim, também não pode ser $f(M) < k$.

Está então encontrado o ponto c nas condições pretendidas ($c = M = \sup S$). ■

Teorema [do valor intermédio (Bolzano-Cauchy)]
Seja $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \neq f(b)$. Se k é um número real estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = k$.

Demonstração
Suponhamos que $f(a)<k<f(b)$ e consideremos o conjunto $S = \{a \le x \le b : f(x) \le k\}$.

Temos que $S \neq \emptyset$, já que $a \in S$, e que S é limitado porque $S \subset [a, b]$. Então, em particular, S possui supremo, digamos M, pelo que $S \subset [a, M]$.

Vejamos que $f(M) = k$. De facto,

(i) se fosse $f(M) > k$, então $M > a$ e da continuidade de f existiria um intervalo $I =]M - \varepsilon, M[$ tal que $f(x) > k$, $\forall x \in I$; logo $S \subset [a, M - \varepsilon[$ e $M - \varepsilon$ seria um majorante de S inferior a M, contrariando o facto de M ser o supremo de S; portanto, não pode ser $f(M) > k$.

(ii) se fosse $f(M) < k$, então $M < b$ e novamente da continuidade de f, existiria um intervalo $J =]M, M + \alpha[$ tal que $f(x) < k$, $\forall x \in J$; consequentemente, $J \subset S$ e M não seria um majorante de S;

assim, também não pode ser $f(M) < k$.

Então $f(M) = k$ e está encontrado o ponto c nas condições pretendidas ($c = M = \sup S$).
Do Teorema 17 saem consequências importantes, entre as quais as seguintes.

Corolario 1
Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tal que $f(a)f(b) < 0$ então existe $c \in]a, b[$ para o qual $f(c) = 0$.

Demonstração
Basta considerar $k = 0$ no Teorema 17. ■

Corolario 2
Se $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e I é um intervalo então $f(I)$ é um intervalo.

Demonstração
Se f for constante, com $f(x) = k$, $\forall x \in I$, então $f(I) = \{k\} = [k, k]$.
Suponhamos que f não é constante. Se $f(I)$ for limitado, ponha-se $m = \inf f(I)$ e $M = \sup f(I)$.
Se $f(I)$ não for limitado superiormente, ponha-se $M = +\infty$.
Mostremos que $f(I)$ é o intervalo de extremos m e M. Das definições, tem-se $f(I) \subset [m, M]$ (será intervalo aberto no extremo infinito). Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $m < d < M$. Existem $a, b \in I$ tais que $m \leq f(a) < d < f(b) \leq M$. Pelo Teorema 17 do valor intermédio, conclui-se que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$. ■

Observação 10

(a) Corolário 1 estabelece que uma função contínua num intervalo fechado e limitado não muda de sinal sem se anular (não diz qual é o ponto onde a função se anula nem quantas vezes se anula).

(b) É fundamental que o domínio de f seja um intervalo. Consideremos a função
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-2,0] \\ 1 & \text{se } x \in [1,3], \end{cases}$$

que é contínua mas que muda de sinal sem se anular.

Isto acontece precisamente porque o seu domínio não é um intervalo.

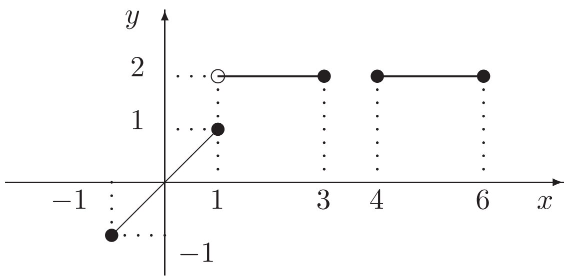
(c) É fundamental que f seja contínua. Consideremos a função
$$g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \in [-2,0[\cup]0,2] \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

que está definida num intervalo e que muda de sinal sem se anular.

Isto acontece porque g não é contínua.

(d) Claro que a função pode não ser contínua nem estar definida num intervalo e, no entanto, anular-se sempre que muda de sinal. É o que acontece, por exemplo, com

$$k(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-1,1] \\ 2 & \text{se } x \in]1,3] \cup [4,6] \end{cases}$$



mas o Corolário 1 não se refere a estes casos. Note-se, no entanto, que restrição de k ao intervalo $[-1,1]$ já está nas condições do Corolário 1.

(e) Mais notável é o caso da função $h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

cuja restrição a $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ está representada no Exemplo 9 (b). Esta função não é contínua em intervalo algum do tipo $[-a,a]$. No entanto, sempre que h muda de sinal, passa por algum ponto onde se anula, devido ao facto de h “oscilar sem parar ”entre -1 e 1 e as oscilações serem tanto mais rápidas quanto mais nos aproximamos da origem.

(f) A função h considerada em (e) mostra que a propriedade enunciada no Teorema 17 do valor intermédio, em particular no seu Corolário 1, não é exclusiva das funções contínuas. ■

Exemplo 21

Vejamos que a equação $\log x = \operatorname{sen} x + \dfrac{\pi}{2}$ possui uma raíz no intervalo $]\pi, 2\pi[$.

De facto, considerando a função $f(x) = \log x - \operatorname{sen} x - \dfrac{\pi}{2}$, $x \in [\pi, 2\pi]$, contínua, tem-se $f(\pi) < 0$ e $f(2\pi) > 0$. Logo (teorema do valor intermédio) existe $c \in]\pi, 2\pi[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja tal que $\log c = \operatorname{sen} c + \dfrac{\pi}{2}$. ■

Exemplo 22

Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$. Vejamos que f possui um *ponto fixo*, ou seja que existe $c \in [0,1] : f(c) = c$.

Se $f(0) = 0$ ou se $f(1) = 1$ então está encontrado o ponto fixo c. No caso em que $f(0) \neq 0$ e que $f(1) \neq 1$, tem-se $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Considerando a função auxiliar $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, $x \in [0.1]$, obviamente contínua, vem $g(0) = f(0) > 0$ e $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pelo que (teorema do valor intermédio) existe $c \in]0,1[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, tal que $f(c) = c$. ■

Exemplo 23

Todo o polinómio de grau ímpar possui uma raíz real.

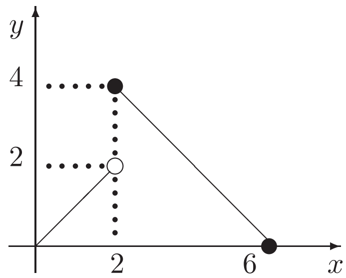
De facto, seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, com n ímpar e $a_n \neq 0$ (suponhamos que é $a_n > 0$). Então p é uma função contínua em $\mathbb{R}$, para a qual podemos escrever

$$p(x) = a_n x^n \underbrace{\left(\frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + 1 \right)}_{q(x)},$$

tendo-se $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} q(x) = 1$. Como n é ímpar, resulta $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} q(x) = -\infty$. Desta forma, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. Pelo teorema do valor intermédio, existe $c \in]a, b[$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. ■

Do Corolário 2 ao Teorema 17 sai que uma função contínua transforma um intervalo I noutro intervalo $f(I)$. Esta propriedade não é exclusiva das funções contínuas. De facto, por exemplo, para a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 6 - x & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$



tem-se $I = [0,6]$, $f(I) = [0,6]$ e, no entanto, f não é contínua.

Porém, atribuindo a f outra característica – a de ser monótona – pode garantir-se que f seja contínua. De facto, vale o seguinte resultado.

Teorema 18

Se $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona no intervalo I e $f(I)$ é um intervalo, então f é contínua.

Demonstração
Suponha-se que f é crescente. Admitindo que f possuia uma descontinuidade em certo $a \in I$, não se poderia ter

$$\ell = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

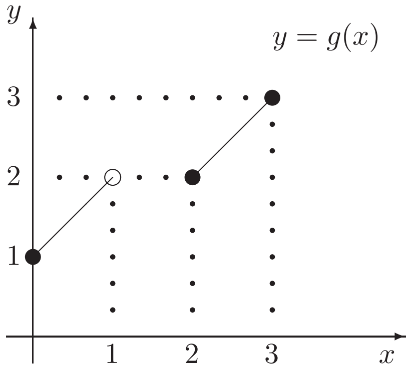
Como f é crescente, deveríamos ter $\ell < f(a)$ ou $f(a) < L$, ou seja, a função deveria apresentar um salto de ℓ para $f(a)$ ou de $f(a)$ para L. Como f não pode decrescer, concluir-se-ia que f não poderia, nunca mais, passar entre ℓ e $f(a)$ ou entre $f(a)$ e L, e $f(I)$ não seria um intervalo.

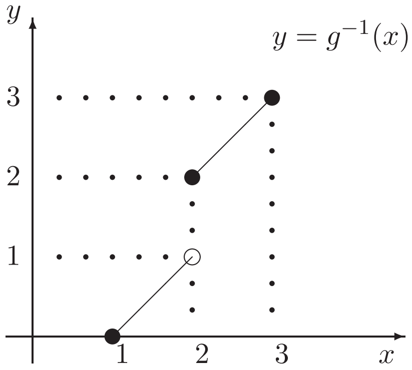
$\blacksquare$

Vejamos agora o que acontece, quanto à continuidade, à inversa de uma função contínua. Seja f: $D \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(D)$ contínua e bijectiva. Define-se a inversa, $f^{-1}: f(D) \longrightarrow D$, que pode não ser contínua. É o caso da função g e da sua inversa,

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

A primeira é contínua e bijectiva e a segunda não é contínua.





No entanto, se f for bijectiva e contínua num intervalo, então a inversa também é contínua. O resultado é o seguinte.

Teorema 19 [Continuidade da função inversa]
Seja $f : I \longrightarrow J$ uma função contínua e bijectiva no intervalo I. Então a sua inversa, $f^{-1}: J \longrightarrow I$, é contínua.

Demonstração
Da continuidade de f, sai que J é um intervalo. Por outro lado, a existência da inversa de f é consequência imediata da sua bijectividade. Sendo f contínua e bijectiva, então f é monótona. Como a monotonia se preserva por inversão, f^{-1} também é monótona. Assim, $f^{-1}: J \longrightarrow I$ é uma função monótona que transforma o intervalo J no intervalo I. Pelo Teorema 18, conclui-se que f^{-1} é contínua. $\blacksquare$

Exercícios

1. Mostrar que a equação $x\,(\operatorname{sen} x)^{17} = (\cos x)^{13}$ possui uma raíz no intervalo $]0, \pi/2[$.

2. Considerar a função polinomial $p(x) = 3x^5 + 5x^2 - 9$, $x \in \mathbb{R}$. Encontrar um intervalo da forma $]z, z+1[$, com $z \in \mathbb{Z}$, que contenha um ponto c tal que $p(c) = 0$.

3. Seja $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$, $x \neq 0$.

   (a) Verificar que $f(-1) < 0$, que $f(1) > 0$ e que f não se anula em $]-1, 1[$.

   (b) Justificar que não há contradição com o teorema do valor intermédio.

4. Seja $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Confirmar que se tem $g(0) > 0$, $g(4) > 0$ e $g(c) = 0$ para algum $c \in]0, 4[$.

   (b) Justificar que não há contradição com o teorema do valor intermédio.

5. Dizer, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) se $f \colon A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e A é fechado e limitado então $f(A) = [m, M]$, onde $m \leq M$, $m, M \in \mathbb{R}$;

   (b) se $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada então f atinge um máximo e um mínimo.

   (c) se $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e existem $a, b \in D$ e $k \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < k < f(b)$, então existe $c \in D$ tal que $f(c) = k$;

   (d) se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e bijectiva então $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ é contínua.

■