Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Números Reais

2. (a) $\frac{3}{8} > 0,37$

   (b) $0,33 < \frac{1}{3}$

   (c) $\sqrt{2} > 1,414$

   (d) $5 = \sqrt{25}$

   (e) $\frac{3}{7} > 0.428571$

   (f) $\frac{22}{7} > \pi$

3. (a) $x = 2,25 = \frac{9}{4}$

   (b) $x = 3,721 = \frac{3721}{1000}$

   (c) $x = 5,(4) = \frac{49}{9}$

   (d) $x = 0,(17) = \frac{17}{99}$

   (e) $x = 9,(17) = \frac{908}{99}$

   (f) $x = 3,66(087) = \frac{365721}{99900}$

4. (a) Por exemplo, $\frac{\pi}{100}$

   (b) Por exemplo, $\frac{32}{11 \times 10} = \frac{32}{110}$.

5. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = -5$ e $y = 1$, tem-se $-5 < 1$ e, no entanto, $|-5| = 5 > 1 = |1|$.

(b) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = -5$ e $y = 2$, tem-se $-5 < 2$ e, no entanto, $(-5)^2 = 25 > 4 = 2^2$.

(c) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = 2$ e $y = 4$, tem-se $2 < 4$ e, no entanto, $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$.

(d) Afirmação verdadeira. Basta observar que a função $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente.

(e) Afirmação verdadeira. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$x < y \Rightarrow x + x < x + y \Rightarrow 2x < x + y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2}$$

e

$$x < y \Rightarrow x + y < y + y \Rightarrow x + y < 2y \Rightarrow \frac{x+y}{2} < y.$$

(f) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = 5$ e $y = 10$, tem-se $5 < 10$ e, no entanto, $\dfrac{1}{|5|} > \dfrac{1}{|10|}$.

6. (a) $|x - 0| < 2$

(b) $|x - (-2)| < 2$

(c) $|x - 2| < 2$

(d) $|x - 2| < 5$

(e) $|x - (-2)| < 5$

7. (a) $[-1, +\infty[$

(b) $[0, \frac{1}{2}]$

(c) $]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$

(d) $]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$

(e) $[-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}]$

(f) $]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$

(g) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$

(h) $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

(i) $]-3, -2[\cup]2, 3[$

(j) $]-\frac{3}{2}, 1[$

(k) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(l) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(m) $]-3, -2[\cup]2, 3[$

(n) $[0, 2[$

(o) $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

(p) $]1, +\infty[$

8. (a) $\{-7,-1\}$ (b) $\{-4,2\}$

   (c) $\{-1\}$ (d) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$

9. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x=4$ e $y=4$, tem-se $\sqrt{4+4}=\sqrt{8}\neq 4=\sqrt{4}+\sqrt{4}$.

   (b) Afirmação falsa. Por exemplo, para $n=2$, $x=2$ e $y=1$, tem-se $(2+1)^2=9\neq 4+1=2^2+1^2$.

   (c) Afirmação verdadeira. Justifique.

10. (a) Conjunto dos majorantes: $[7,+\infty[$; $\sup A=7$; $\max A=7$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,0]$; $\inf A=0$; $\min A=0$
    A é limitado porque é majorado e minorado

    (b) Majorantes: $[2,+\infty[$; $\sup B=2$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $\emptyset$; não existe ínfimo nem mínimo
    B não é limitado porque não é minorado

    (c) Conjunto dos majorantes: $[2,+\infty[$; $\sup C=2$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,1]$; $\inf C=1$; não existe mínimo
    C é limitado porque é majorado e minorado

    (d) Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{2},+\infty[$; $\sup D=\sqrt{2}$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,1]$; $\inf D=1$; $\min D=1$
    D é limitado porque é majorado e minorado

    (e) Conjunto dos majorantes: $\emptyset$; não existe supremo nem máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,1]$; $\inf E=1$; $\min E=1$
    E não é limitado porque não é majorado

    (f) Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{5},+\infty[$; $\sup F=\sqrt{5}$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,-\sqrt{5}]$; $\inf F=-\sqrt{5}$; não existe mínimo
    F é limitado porque é majorado e minorado

    (g) Conjunto dos majorantes: $[0,+\infty[$; $\sup G=0$; $\max G=0$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,0]$; $\inf G=0$; $\min G=0$
    G é limitado porque é majorado e minorado

    (h) Conjunto dos majorantes: $[1,+\infty[$; $\sup H=1$; $\max H=1$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,0]$; $\inf H=0$; não existe mínimo
    H é limitado porque é majorado e minorado

    (i) Conjunto dos majorantes: $[\frac{1}{2},+\infty[$; $\sup I=\frac{1}{2}$; $\max I=\frac{1}{2}$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,-1]$; $\inf I=-1$; $\min I=-1$
    I é limitado porque é majorado e minorado

11. (a) $A' = \mathbb{R}$
    Conjunto dos majorantes: $\emptyset$; não existe supremo nem máximo
    Conjunto dos minorantes: $\emptyset$; não existe ínfimo nem mínimo

    (b) $B =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$
    $B' = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
    Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{2}, +\infty[$; $\sup B = \sqrt{2}$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -\sqrt{2}]$; $\inf B = -\sqrt{2}$; não existe mínimo

    (c) $C =]-\sqrt{50}, \sqrt{50}[\cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
    $C' = [-\sqrt{50}, \sqrt{50}]$
    Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{50}, +\infty[$; $\sup C = \sqrt{50}$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -\sqrt{50}]$; $\inf B = -\sqrt{50}$; não existe mínimo

    (d) $D =]-\infty, 0[$
    $D' =]-\infty, 0]$
    Conjunto dos majorantes: $[0, +\infty[$; $\sup D = 0$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $\emptyset$; não existe ínfimo nem mínimo

    (e) $E =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$
    $E' = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$
    Conjunto dos majorantes: $\emptyset$; não existe supremo nem máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -1]$; $\inf E = -1$; não existe mínimo

    (f) $F = (]-2, 2[\cap \mathbb{Q}) \cup ([1, \pi] \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$
    $F' = [-2, \pi]$
    Conjunto dos majorantes: $[\pi, +\infty[$; $\sup F = \pi$; $\max F = \pi$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -2]$; $\inf F = -2$; não existe mínimo

    (g) $G' = [0, 1]$
    Conjunto dos majorantes: $[1, +\infty[$; $\sup G = 1$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty, 0]$; $\inf G = 0$; $\min G = 0$

    (h) $H = (]-7, -1[\cap \mathbb{Q}) \cup (]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$
    $H' = [-7, \sqrt{3}]$
    Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{3}, +\infty[$; $\sup H = \sqrt{3}$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -7]$; $\inf H = -7$; não existe mínimo