Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo
2018/2019

Licenciatura em Ciências da Computação

Folha 8

Exercício 8.1 Calcule:

1) $\displaystyle\int (3x^2 - 2x^5)\, dx;$

2) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + 2)^2\, dx;$

3) $\displaystyle\int (2x + 10)^{20}\, dx;$

4) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\, dx;$

5) $\displaystyle\int x^4 (x^5 + 10)^9\, dx;$

6) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\, dx;$

7) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\, dx;$

8) $\displaystyle\int \frac{x}{3-x^2}\, dx;$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{4-3\,x}\, dx;$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{3x}}\, dx;$

11) $\displaystyle\int \frac{-7}{\sqrt{1-5x}}\, dx;$

12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+3\,\ln x}}{x}\, dx;$

13) $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen} x^2\, dx;$

14) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)}\, dx;$

15) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} - 3\right)^2 \frac{1}{x^2}\, dx;$

16) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\pi - 2\,x)\, dx;$

17) $\displaystyle\int \operatorname{th} x\, dx;$

18) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ \cos x\, dx;$

19) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\ \cos x\, dx;$

20) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx;$

21) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 \tfrac{x}{2}\ \cos^2 \tfrac{x}{2}\, dx;$

22) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx;$

23) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\, dx;$

24) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx;$

25) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ \operatorname{sen}(\ln x)\, dx;$

26) $\displaystyle\int \frac{-3}{x\,(\ln x)^3}\, dx;$

27) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx;$

28) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-2e^x}\, dx;$

29) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(7x)}\, dx;$

30) $\displaystyle\int \left(\sqrt{2x-1} - \sqrt{1+3x}\right)\, dx;$

31) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ \left(1 + \ln^2 x\right)\, dx;$

32) $\displaystyle\int \frac{2\, +\, \sqrt{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2}\, dx;$

33) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg}\, x}}{1+x^2}\, dx;$

34) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\, dx.$

Exercício 8.2 Calcule:

a) $\displaystyle\int \ln x\, dx;$

b) $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen}(2x)\, dx;$

c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx;$

d) $\displaystyle\int x \cos x\, dx;$

e) $\displaystyle\int \ln(1-x)\, dx;$

f) $\displaystyle\int x\ \ln x\, dx;$

g) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx;$

h) $\displaystyle\int x\ \operatorname{sen} x\ \cos x\, dx;$

i) $\displaystyle\int \ln^2 x\, dx;$

j) $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx;$

k) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\, dx;$

l) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x}\ \operatorname{sen} x\ \cos x\, dx;$

m) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$ o) $\displaystyle\int x^2\,\ln x\,dx;$ q) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,\operatorname{sen}(3x)\,dx;$

n) $\displaystyle\int x\,\operatorname{arctg} x\,dx;$ p) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx;$ r) $\displaystyle\int x^3\,e^{x^2}\,dx.$

Exercício 8.3 Usando o método de substituição, calcule:

a) $\displaystyle\int x\,(x+3)^{1/3}\,dx;$ d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$ g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx;$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx;$ e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{3+e^x}\,dx;$ h) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}}\,dx;$ f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

Exercício 8.4 Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx;$ g) $\displaystyle\int \frac{27}{x^4-3\,x^3}\,dx;$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-1}{(x^2-1)(x-2)}\,dx;$ h) $\displaystyle\int \frac{x^4-8}{x^3-2\,x^2}\,dx;$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x-2}{x^2(x-2)}\,dx;$ i) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-2)\,(x^2-2\,x+5)}\,dx;$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x+1)^3}\,dx;$ j) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x(x^2-1)}\,dx;$ k) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x(x-1)^2(x^2+1)}\,dx;$

f) $\displaystyle\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\,dx;$ l) $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2-x-1}{x^2(x^2-1)}\,dx.$

Exercício 8.5 Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\sqrt{x})^7\,\sqrt{x}}\,dx;$ e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x}\,dx;$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx;$ f) $\displaystyle\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x\,dx;$

c) $\displaystyle\int \frac{x+(\operatorname{arcsen}(3x))^2}{\sqrt{1-9\,x^2}}\,dx;$ g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx;$

d) $\displaystyle\int \frac{x\,e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\,\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

Exercício 8.6 Sendo $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\,\operatorname{sen} x$, calcule a primitiva de f cujo gráfico passa pelo ponto $(\frac{\pi}{2},\pi)$.

Exercício 8.7 Em cada alínea, determine a única função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável, tal que:

a) $f''(x) = 4x - 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(1) = 3$ e $f'(2) = -2;$

b) $f''(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0$ e $f'(0) = 1.$

Exercício 8.8 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi x}\, dx;$

b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx;$

c) $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x-1|\, dx;$

d) $\displaystyle\int_0^2 |(x-1)(3x-2)|\, dx;$

e) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx;$

f) $\displaystyle\int_{-5}^{0} 2x\sqrt{4-x}\, dx;$

g) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\, dx;$

h) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\, dx;$

i) $\displaystyle\int_0^2 x^3\, e^{x^2}\, dx;$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx;$

k) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x\, dx;$

l) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \sqrt{|x|}\, dx;$

m) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$, com

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{se } 1 < x \le 2; \end{cases}$$

n) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$, com

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1/2, \\ -x & \text{se } 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

Exercício 8.9 Dado $a \in \mathbb{R}^+$, seja $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que:

a) se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx;$

b) se f é ímpar então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$

Exercício 8.10 Dados $a < b \in \mathbb{R}$, mostre que se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, então existe $c \in \,]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Exercício 8.11 Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida por:

a) $\displaystyle F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}\, dt,\ x \in \mathbb{R};$

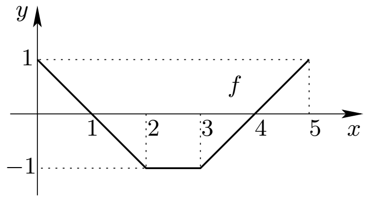
b) $\displaystyle F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\, dt,\ x \in \mathbb{R};$

c) $\displaystyle F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\, dt,\ x \in \mathbb{R}.$

Exercício 8.12 Sabendo que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz a igualdade abaixo para $x \geq 0$, calcule f em cada um dos seguintes casos:

a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$; b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3e^x - x^4$.

Exercício 8.13 Considere $F : \left[0, \sqrt{5}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$, onde a função $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ é aquela cujo gráfico está representado na figura. Determine $F\left(\sqrt{3}\right)$ e $F'\left(\sqrt{3}\right)$.



Exercício 8.14 Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

a) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não integrável;
b) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não integrável;
c) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não primitivável;
d) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivável mas não derivável;
e) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável mas não primitivável;
f) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não integrável tal que $|f|$ seja integrável.

Exercício 8.15 Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

a) $x = 1,\ \ x = 4,\ \ y = \sqrt{x},\ \ y = 0$;
b) $x = 0,\ \ x = 1,\ \ y = 3x,\ \ y = -x^2 + 4$;
c) $x = 0,\ \ x = 2,\ \ x^2 + (y-2)^2 = 4,\ \ x^2 + (y+2)^2 = 4$;
d) $x = 0,\ \ x = \pi/2,\ \ y = \operatorname{sen} x,\ \ y = \cos x$;
e) $x = -1,\ \ y = |x|,\ \ y = 2x,\ \ x = 1$;
f) $y = -x^3,\ \ y = -(4x^2 - 4x)$;
g) $y = -x^2 + \dfrac{7}{2},\ \ y = x^2 - 1$;
h) $y = 0,\ \ x = -\ln 2,\ \ x = \ln 2,\ \ y = \operatorname{sh} x$.

Exercício 8.16 Escreva uma expressão integral que permita calcular a área de cada uma das seguintes regiões:

a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \,\wedge\, -x \leq y \leq x^2\right\}$;
b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \,\wedge\, 0 \leq y \leq x\right\}$;
c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$;
d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\right\}$;
e) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \,\wedge\, 0 \leq y \leq e^x \,\wedge\, 0 \leq y \leq e^{-x}\right\}$;
f) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \,\wedge\, 0 \leq y \leq x^2 \,\wedge\, 0 \leq y \leq 2 - x\right\}$;
g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \,\wedge\, y \geq x^2 - 2x \,\wedge\, y \leq 4\right\}$;
h) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \,\wedge\, y \geq x^2 - 4x + 3 \,\wedge\, y \leq -x^2 + 5x - 4\right\}$.