

Exercício 7.1 Seja  $f(x) = x^2$ .

- Calcule  $f'(-1)$  e interprete geometricamente o resultado obtido.
- Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $-1$ .

Exercício 7.2 Verifique se a função  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$  é derivável em  $x = 1$ .

Exercício 7.3 Calcule, onde existir, a derivada de cada uma das funções:

- |                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7$ ;      | j) $f(x) = x \ln x$ ;                     |
| b) $f(x) = (6x + 1)^5$ ;          | k) $f(x) = x \ln(x^2 + x + 1)$ ;          |
| c) $f(x) = \sqrt{x} + x^\pi$ ;    | l) $f(x) = \sin x + \cos x$ ;             |
| d) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x}}$ ; | m) $f(x) = \operatorname{tg} x$ ;         |
| e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;       | n) $f(x) = 5x^3 \cos(2x)$ ;               |
| f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ;       | o) $f(x) = \frac{e^x \sin x}{\ln x}$ ;    |
| g) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ ; | p) $f(x) = e^{\sin x}$ ;                  |
| h) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ ;     | q) $f(x) = \sin(\cos(x^2))$ ;             |
| i) $f(x) = x^3 e^x$ ;             | r) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} e^x \sin x$ . |

Exercício 7.4 Considere a função  $f(x) = 1 - e^x$ .

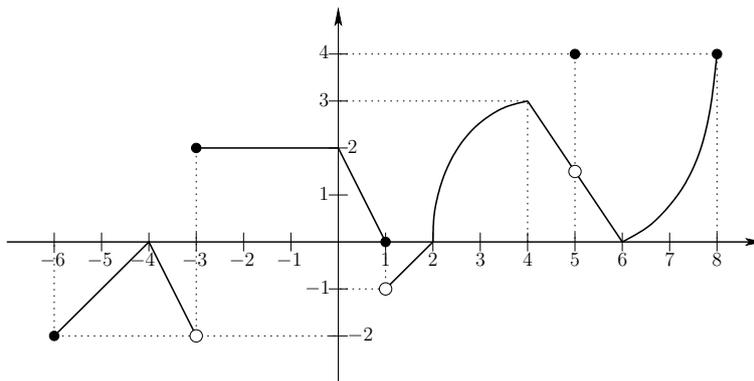
- Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das abscissas.
- Determine uma equação da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1.

Exercício 7.5 Determine a função derivada de cada uma das seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2+1} & \text{se } x < 3, \\ -3x & \text{se } x \geq 3, \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \leq 1, \\ 2x^3 & \text{se } 1 < x < 2, \\ 16 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

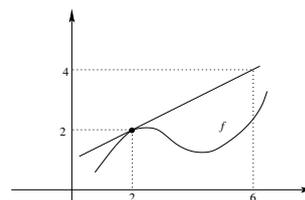
Exercício 7.6 Determine  $a$  e  $b$  de modo que a função  $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 3 \\ ax + b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$  seja derivável.

Exercício 7.7 Na figura está representado o gráfico da função  $f$ .

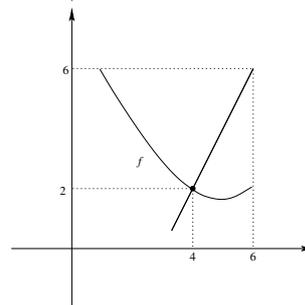


- Indique o domínio e o contradomínio de  $f$ .
- Indique os pontos de descontinuidade de  $f$ .
- Indique os pontos onde  $f$  é contínua mas não tem derivada.

Exercício 7.8 A figura seguinte representa o gráfico de uma função  $f$  e da reta tangente a esse gráfico no ponto  $(x, y) = (2, 2)$ . Sendo  $g(x) = f(x^2 - 2)$ , qual o valor da derivada  $g'(2)$ ?



Exercício 7.9 A figura seguinte representa o gráfico de uma função  $f$  e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto  $(x, y) = (4, 2)$ . Sendo  $g(x) = f(5x - x^2)$ , qual o valor da derivada  $g'(1)$ ?



Exercício 7.10 De uma função  $f : ] - 2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  sabe-se que

$$f(-1) = 0 \quad \text{e} \quad f'(x) = \frac{1 + \ln(x + 2)}{x + 2}.$$

- Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $-1$ .
- Poderá concluir que  $f$  é contínua em  $x = -1$ ? Justifique.
- Calcule  $f''(2)$ .

Exercício 7.11 Mostre que:

- |  |  |
|--|--|
| a) $\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$  | e) $\text{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$ |
| b) $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}};$ | f) $\text{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$ |
| c) $\text{arctg}' x = \frac{1}{1 + x^2};$    | g) $\text{argth}' x = \frac{1}{1 - x^2};$        |
| d) $\text{arccotg}' x = \frac{-1}{1 + x^2};$ | h) $\text{argcoth}' x = \frac{1}{1 - x^2}.$      |

Exercício 7.12 Usando o teorema de Rolle mostre que a equação  $x^2 = x \sin x + \cos x$  possui exatamente duas raízes reais.

Exercício 7.13 Mostre que o polinómio  $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$  possui exatamente um zero no intervalo  $]1, 3[$ .

Exercício 7.14 Considere o polinómio  $p(x) = x^5 + bx + 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , com  $b \in \mathbb{R}$ .

- Justifique que o polinómio  $p$  tem pelo menos um zero real.
- Indique, justificando, um valor de  $b$  para o qual a equação  $p(x) = 0$  tem exatamente uma raiz real no intervalo  $]0, 1[$ .
- Mostre que para esse valor de  $b$ , o polinómio  $p$  tem exatamente três zeros reais.

Exercício 7.15

- Aplicando o teorema de Rolle demonstre que a equação  $x^3 - 3x + b = 0$  não pode ter mais do que uma raiz real no intervalo  $] - 1, 1[$  qualquer que seja o valor de  $b$ .
- Indique para que valores de  $b$  existe exatamente uma raiz real da equação em  $] - 1, 1[$ .

Exercício 7.16 Indique se existe uma função  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável, tal que  $f'(x) = 0$  para  $x \in [0, 1]$  e  $f'(x) = 1$  para  $x \in ]1, 2]$ .

Exercício 7.17 Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ .

- Verifique que  $f(-1) = f(1) = 0$ .
- Mostre que  $f'(x)$  nunca se anula em  $] - 1, 1[$ .
- Explique porque não há qualquer contradição com o teorema de Rolle.

Exercício 7.18 Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $g(x) = x - e^{x-1}$ .

- Verifique que  $g(1) = g'(1) = 0$ .
- Mostre que 1 é o único zero de  $g$ .

Exercício 7.19 Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções deriváveis tais que  $f'(x) < g'(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) = g(a)$ . Mostre que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x > a$ .

Exercício 7.20 Mostre, recorrendo ao teorema de Lagrange, que:

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad e^x > 1 + x$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ ;
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$ .

Exercício 7.21 Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x e^x & \text{se } x < 0, \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Verifique que  $f$  é uma função derivável.
- Indique, justificando, os intervalos de monotonia de  $f$ .
- Determine o contradomínio de  $f$ .

Exercício 7.22 Calcule os seguintes limites:

- |  |  |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - 1};$             | k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1 + 5x^2}{x^3};$   |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right);$                | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}}{x};$                            |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x;$   | m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen}^3 x}{x^3};$                   |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x;$   | n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right);$                   |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$                                       | o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3};$                        |
| f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x};$                           | p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3};$  |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3};$                   | q) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x}{x \operatorname{sen} 2x};$ |
| h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arcsen} x \operatorname{cotg} x);$               | r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x + 2 \operatorname{sen} x}.$                                   |
| i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sen} 5x)}{\ln(\operatorname{sen} 6x)};$ |  |
| j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x};$       |  |

Exercício 7.23 Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- Mostre que  $f$  e  $g$  são ambas contínuas em 0.
- Mostre que  $f$  não é derivável em 0.
- Mostre que  $g$  é derivável em 0 e indique  $g'(0)$ .

Exercício 7.24 Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

- uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável apenas no ponto 1;
- uma função  $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, tal que  $f(2) = f(3)$  e  $f'(x) \geq x$ , para todo o  $x \in [2, 3]$ ;
- uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, não decrescente, tal que  $f'(x) < 0$ , para todo o  $x \in D$ ;
- uma função  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, com pelo menos dois zeros, mas cuja derivada nunca se anula;
- uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, tal que o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$  é finito e o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$  é infinito.

Exercício 7.25 Indique se são verdadeiras ou falsas as proposições seguintes:

- a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 8x & \text{se } x < 1 \\ 4x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$  é derivável no ponto 1;
- existe uma função  $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, tal que  $f'(x) = 1$  para  $x \in [1, 3]$  e  $f'(x) = -1$  para  $x \in ]3, 4]$ ;
- existe  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, não constante, tal que  $f'(x) = 0$  para  $x \in D$ ;
- se  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável e  $f'(x) > 0$  para todo o  $x \in [0, 1]$ , então  $f([0, 1]) = [f(0), f(1)]$ .