Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

2018/2019

Folha 4

Exercício 4.1 Verifique se as seguintes funções são limitadas ou monótonas e indique, quando possível, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seus contradomínios:

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{|x|}{x} \end{array}$

b) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2}-1 \end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$

Exercício 4.2 Considere as seguintes funções:

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$

$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$ $i(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]-1,2] \\ 2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus]-1,2] \end{cases}$

a) Classifique cada uma delas quanto à injetividade e sobrejetividade.

b) Determine $f\big([-1,1]\big)$, $i\big([-1,0]\big)$, $i\big(]-1,3]\big)$, $f^{-1}\big(\{1\}\big)$, $h^{-1}\big(\{0\}\big)$ e $g^{-1}\big(]-1,3]\big)$.

Exercício 4.3 Sejam $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x \quad \text{e} \quad g(x) = 2\sqrt{x}.$$

Caracterize a função $f \circ g$.

Exercício 4.4 Para a função h dada indique duas funções f e g, diferentes da identidade, tais que $h = f \circ g$:

a) $h(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{5}{x^2-4}\right)$;

b) $h(x) = \cos(x^2+2) + \frac{1}{x^2+2}$;

c) $h(x) = \sqrt{x-1} - 2x + 2$.

Exercício 4.5 Considere a função $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x|x| \end{array}$.

Justifique que f é invertível e determine a sua inversa.

Exercício 4.6 Considere a função $f : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se} \quad -3 \leq x < -1 \\ x^2+1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 4-2x & \text{se} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $f([0,3]) = [-2,1]$;

b) existe $x \in [1,3]$ tal que $f(x) = -1$;

c) não existe $x \in [-3,0]$ tal que $f(x) = 2$.

Exercício 4.7 Considere a função $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$. Esboce o gráfico da função g definida por:

a) $g(x) = f(x) + 2, \ x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = f(x+2), \ x \in \mathbb{R}$;

c) $g(x) = 2f(x), \ x \in \mathbb{R}$;

d) $g(x) = f(2x), \ x \in \mathbb{R}$;

e) $g(x) = \max\{f(x), 2\}, \ x \in \mathbb{R}$;

f) $g(x) = \min\{f(x), 1\}, \ x \in \mathbb{R}$.

Exercício 4.8 Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) a função $f : [0,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ é estritamente crescente;

b) a função $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen}(4x) \end{array}$ é periódica de período $\frac{\pi}{2}$;

c) a função $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ é minorada mas não é majorada.