Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

# Cálculo

2018/2019

Licenciatura em Ciências da Computação

Folha 1

**Exercício 1.1** Preencha os espaços identificados com $\square$ de modo a obter proposições verdadeiras:

a) $\frac{3}{8} \square\, 0,37$; c) $\sqrt{2} \square\, 1,414$; e) $\frac{3}{7} \square\, 0,428571$;
b) $0,33 \square\, \frac{1}{3}$; d) $5 \square \sqrt{25}$; f) $\frac{22}{7} \square\, \pi$.

**Exercício 1.2** Escreva sob a forma de dízima as seguintes frações:

a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{29}{4}$; c) $\frac{7}{101}$; d) $\frac{274301}{3300}$.

**Exercício 1.3** Representе os seguintes números racionais sob a forma de quociente de números inteiros:

a) $1,25$; b) $2,374$; c) $5,(3)$; d) $54,134(728)$.

**Exercício 1.4** Encontre um número racional e um número irracional no intervalo:

a) $\left]\frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}\right[$; b) $\left]\frac{1}{101}, \frac{1}{100}\right[$; c) $\left]\frac{\pi}{101}, \frac{\pi}{100}\right[$.

**Exercício 1.5** Sejam $x$ e $y$ dois números reais tais que $x < y$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes relações é verdadeira ou falsa:

a) $x^2 < y^2$; c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ $(x, y \neq 0)$;
b) $x^3 < y^3$; d) $x < \frac{x+y}{2} < y$.

**Exercício 1.6** No que se segue $x$ e $y$ representam números reais e $n$ representa um número natural. Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contraexemplo para as relações que forem falsas.

a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; c) $(x+y)^n = x^n + y^n$;
b) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$; d) $(xy)^n = x^n y^n$.

**Exercício 1.7** Em cada uma das alíneas seguintes encontre encontre números reais $a$ e $\varepsilon$ de modo a que a solução da inequação $|x - a| < \varepsilon$ seja o intervalo dado:

a) $]-2, 2[$; c) $]0, 4[$;
b) $]-4, 0[$; d) $]-3, 7[$.

Exercício 1.8 Represente em extensão os seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x+4| = 3\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x+2|\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2-7)^2 = 0\}$;

e) $\big\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x+1} = 2x\big\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : |x|\, |x+3| = 4\}$.

Exercício 1.9 Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2-1) \geq 0\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} : |5 - \frac{1}{x}| < 1\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$;

g) $\{x \in \mathbb{R} : |5x+2| \leq 1\}$;

h) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$;

i) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$;

j) $\{x \in \mathbb{R} : |3x-2| \leq 1\}$;

k) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$;

l) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < |x-2|\}$;

m) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0\}$;

n) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-2| < 10\}$;

o) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2-1| \leq 1\}$;

p) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$;

q) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$;

r) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \leq 0\}$;

s) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2|x|\}$;

t) $\{x \in \mathbb{R} : |x+1| > |x-3|\}$.

Exercício 1.10 Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos:

a) $[-\sqrt{5}, 3] \cap \mathbb{Q}$;

b) $[0, \sqrt{3}\,] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$;

c) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 11\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : |x-5| < 3\}$;

e) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 25/16\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : x \leq 0 \wedge |x^2-1| < x+5\}$;

g) $\big\{x \in \mathbb{R} : 5 - x^2 < 1\big\}$;

h) $\{2 + 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \big\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\big\}$.

Exercício 1.11 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + |x|$. Considere os conjuntos

$$A = f\,([-4, 1[) \qquad \text{e} \qquad B = f\,(]-\infty, -2])\ .$$

a) Especifique os conjuntos $A$ e $B$ e determine os correspondentes conjuntos de majorantes e de minorantes.

b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos conjuntos considerados.

Exercício 1.12 Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 7 \Rightarrow |x| > 7$;

b) $\forall x \in \mathbb{R} : |1 + 4x| < 1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$;

c) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$;

d) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-5| \leq 2 \Rightarrow 3 < x < 7$.