Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo
2018/2019

Licenciatura em Ciências da Computação

Folha 6

Exercício 6.1 Estabeleça as seguintes igualdades:

a) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}, \quad x \in \mathbb{R};$

b) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Exercício 6.2 Calcule:

a) $\cos\left(\arccos(\frac{1}{8})\right);$

b) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\frac{9\pi}{4})\right);$

c) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right);$

d) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2})\right);$

e) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}(1) + \pi\right);$

f) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right);$

g) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{23\pi}{6}\right);$

h) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right);$

i) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi);$

j) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1)).$

Exercício 6.3 Deduza as seguintes igualdades em domínios que deverá especificar:

a) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2};$

b) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x};$

c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2};$

d) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};$

e) $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

f) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Exercício 6.4 Recorde que $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e que $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Prove que:

a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$

b) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x;$

c) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x;$

d) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x;$

e) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$

f) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$

g) $\operatorname{th}^2 x + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1;$

h) $\operatorname{coth}^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1.$

Exercício 6.5 Verifique que:

a) $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R};$

b) $\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in [1, +\infty[;$

c) $\operatorname{argth} x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad x \in]-1, 1[;$

d) $\operatorname{argcoth} x = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[.$

Exercício 6.6 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1, \\ \operatorname{arcsen} x & \text{se } -1 < x < 1, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Estude a continuidade da função f.

b) Indique o contradomínio de f.

c) Determine, caso existam, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercício 6.7 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0, \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Determine k de modo que f seja contínua.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercício 6.8 Resolva as seguintes equações:

a) $e^x = e^{1-x};$

b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0;$

c) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0;$

d) $\ln(x^2-1) + 2\ln 2 = \ln(4x-1).$