Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

2018/2019

Folha 5

Exercício 5.1 Uma função g satisfaz as condições indicadas; esboce um gráfico possível de g, em cada um dos seguintes casos:

a) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$;

b) $\lim_{x\to2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x\to2^+} g(x) = 4$, $D_g = [-1, 4]$;

c) $\lim_{x\to2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x\to2^+} g(x) = 4$, $D_g =]-1, 4[$, $\lim_{x\to-1} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to4} g(x) = -\infty$.

Exercício 5.2 Calcule os limites que se seguem:

a) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-2^+} \frac{3}{x+2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-3^+} \frac{|x+3|}{x+3}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{sen} 3x}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

o) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

p) $\displaystyle\lim_{x\to0} \pi x \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$

q) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^2 + x\cos x)$

r) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+3}{2x-7}$

s) $\displaystyle\lim_{x\to0} (\operatorname{sen}(2x) + x^2\cos(5x))$

t) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^4-2x+1}{-3x+1}$

u) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+10}{x^4-2x+4}$

Exercício 5.3 Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

Diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e determine o seu valor.

Exercício 5.4 Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}. \end{cases}$

a) Diga, justificando, se f é contínua em π.

b) Indique dois pontos do domínio onde f seja descontínua.

Exercício 5.5 Determine o conjunto dos pontos em que cada uma das seguintes funções é contínua:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N} \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Exercício 5.6 Em cada alínea, apresente uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo conjunto dos pontos de continuidade é:

a) $\mathbb{R} \backslash \{0\}$;
b) $\emptyset$;
c) $[0, 1]$;
d) $\mathbb{Z}$;
e) $\{0\}$;
f) $]0, 1[$.

Exercício 5.7 Estude a continuidade das funções definidas por:

a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 5 - \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercício 5.8 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + a & \text{se } x \leq 1, \\ 1 - ax & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determine o valor de a de modo que f seja contínua.

Exercício 5.9 Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas:

a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;
b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;
c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

Exercício 5.10 Seja, $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$
Verifique que $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$. Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

Exercício 5.11 Para cada uma das funções polinomiais definidas a seguir, encontre $z \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$ para algum $x \in]z, z + 1[$:

a) $f(x) = x^3 - x + 3$;
b) $f(x) = x^5 + x + 1$;
c) $f(x) = -2x^3 + 10x - 1$.

Exercício 5.12 Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados:

a) $x = \cos x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
b) $x = -\ln x, \quad x \in]0, 1]$;
c) $2 + x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.13 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

a) Mostre que f possui um *ponto fixo*, isto é, $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$.
b) Dê exemplo de uma função contínua, $f : [0, 1[\longrightarrow [0, 1[$, sem ponto fixo.

Exercício 5.14 Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe uma função:

a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores negativos e positivos;
b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e descontínua tal que f^2 e f^3 sejam contínuas;
c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínua tal que $g(x) = f(x) + \operatorname{sen} x$ é contínua.

Exercício 5.15 Considere a função $g :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possui máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.

Exercício 5.16 Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

a) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua então $g \circ f$ não é contínua;

b) se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é limitada;

c) existe $x \in]1, e[$ tal que $\ln(x^3) = x$;

d) se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tal que $0 \leq f(x) \leq 2$ para todo $x \in [0,1]$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 2c$;

e) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então f atinge um máximo e um mínimo;

f) uma função $f : [0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada possui máximo;

g) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua num ponto a, então f também é contínua em a.

Exercício 5.17 Em cada uma das alíneas esboce, se possível, o gráfico de uma função f definida em $[0,1]$ e satisfazendo as condições dadas:

a) f contínua em $[0,1]$ com valor mínimo 0 e valor máximo 1;

b) f contínua em $[0,1[$ com valor mínimo 0 e sem valor máximo;

c) f contínua em $]0,1[$ assume os valores 0 e 1 mas não assume o valor $\frac{1}{2}$;

d) f contínua em $[0,1]$ assume os valores -1 e 1 mas não assume o valor 0;

e) f contínua em $[0,1]$ com valor mínimo 1 e valor máximo 1;

f) f contínua em $[0,1]$, não constante, não assume valores inteiros;

g) f contínua em $[0,1]$ não assume valores racionais;

h) f contínua em $[0,1]$ assume um valor máximo, um valor mínimo e todos os valores intermédios;

i) f contínua em $[0,1]$ assume apenas dois valores distintos;

j) f contínua em $]0,1[$ assume apenas três valores distintos;

k) f não contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo aberto e limitado;

l) f não contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado;

m) f contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo não limitado;

n) f não contínua em $[0,1]$ tem por imagem o intervalo $[0,+\infty[$;

o) f não contínua em $[0,1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.